UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

# Agrégation interne : Résumé d'Analyse

Valérie NACHEF

# Chapitre 1

# Suites Numériques

## 1.1 Définitions - Premières propriétés

### 1.1.1 Définition

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est appelé le n-nième terme de la suite. Parfois, on étudiera le suite uniquement à partir d'un certain rang i.e. pour $n \geq n_0$.

### 1.1.2 Convergence - Divergence

1. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

2. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\exists l \in \mathbb{K},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

3. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si et seulement si :

$$\forall l \in \mathbb{K},\ \exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ et } |u_n - l| > \epsilon)$$

**Proposition**
Si une suite numérique converge dans $\mathbb{K}$, alors la limite est unique.

### 1.1.3 Suites majorées, minorées, bornées

1. On dit qu'un réel $A$ est un majorant d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq A$$

On dit qu'un réel $A$ est un minorant d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq A$$

2. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée (resp. minorée) si et seulement si il existe un réel $A$ qui soit un majorant (resp. minorant) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$$

4. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists N,\ \forall n,\ (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

5. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists N,\ \forall n,\ (n \geq N \Rightarrow u_n \leq -A)$$

**Proposition**

1. Toute suite complexe convergente est bornée.
2. Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.
3. Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.

### 1.1.4 Suites de Cauchy

**Définition**
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0,\ \forall n \geq N_0,\ \forall p \geq N_0,\ |u_n - u_p| < \epsilon$$

**Proposition**
Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

### 1.1.5 Propriétés des suites convergentes

**Proposition**
On considère deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in N}$ convergentes dans $\mathbb{K}$ respectivement vers $l$ et $l'$. Alors les suites $U + V = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $U \times V = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers respectivement $l + l'$ et $l \cdot l'$. Si $l' \neq 0$ la suite $\frac{U}{V} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{l}{l'}$.

**Proposition**
Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un réel $l$. Alors

1. $l > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_n \geq 0$
2. $l < 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_n \leq 0$

**Proposition**
Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un réel $l$. Alors

1. $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$
2. $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \leq 0 \Rightarrow l \leq 0$

**Corollaire** On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers les réels $l$ et $l'$.

1. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.
2. Si $M$ est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $l \leq M$.
3. Si $m$ est un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $l \geq m$.

**Proposition**
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel $l$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $l$.

### 1.1.6 Convergence en moyenne

**Définition**
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne, ou au sens de Césaro, si la suite de terme général $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$ est convergente.
**Théorème**
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de limite $\ell$. Alors cette suite converge en moyenne vers $\ell$.
**Remarque :** La réciproque de ce théorème est fausse. Il suffit de considérer la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

## 1.2 Suites extraites ou sous-suites - Valeurs d'adhérence

### 1.2.1 Suites extraites

**Définition**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

Remarque : On peut vérifier par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$
**Proposition**
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.

### 1.2.2 Valeurs d'adhérence

**Définition**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit qu'un élément $a$ de $\mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**Proposition**
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
**Proposition**
Une suite réelle est divergente si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :
- Elle est non bornée,
- Elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.

## 1.3 Suites monotones - Suites adjacentes

**Définition**
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$

décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$$

**Proposition**

1. Une suite réelle croissante et majorée converge vers $M = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
2. Une suite réelle décroissante et minorée converge vers $m = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

**Définition**
Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

**Proposition**

Si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite. De plus, en notant $l$ cette limite commune, on a :

$$\forall n \in N,\ u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$$

## 1.4 Relations de comparaison

### 1.4.1 La relation $O$

**Définition**

On dit que la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un réel positif $M$ et un entier positif $n_0$ tels que

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq M|v_n|$$

On note $U = O(V)$ ou $u_n = O(v_n)$.

### 1.4.2 La relation $o$

**Définition**

On dit que la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable ou infiniment petite devant la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \epsilon,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ |u_n| \leq \epsilon|v_n|$$

On note $U = o(V)$ ou $u_n = o(v_n)$

**Proposition**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite $\alpha_n$ convergente vers 0 vérifiant :

$$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ u_n = \alpha_n \cdot v_n$$

**Corollaire**

On suppose qu'il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $v_n \neq 0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

### 1.4.3 L'équivalence

**Définition**

On dit que la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(U - V) = o(V)$.

On note $U \sim V$.

**Proposition**

Une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0 vérifiant

$$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ u_n = (1 + \alpha_n)v_n$$

**Proposition**

Une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 1 vérifiant

$$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ u_n = \alpha_n v_n$$

**Corollaire**

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

**Corollaire**

Lorsque deux suites réelles sont équivalentes, si l'une est convergente, l'autre est aussi convergente vers la même limite.

**Proposition**

On suppose qu'il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $v_n \neq 0$. Alors la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

**Corollaire**

Soit $l$ un réel non nul. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l$ si et seulement si $u_n \sim l$.

## 1.5 Suites récurrentes

### 1.5.1 Définitions

**Suites récurrentes d'ordre 1**

Soit $E$ un ensemble non vide. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 si on peut la définir de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f$ est une application définie sur $E$ à valeurs dans $E$.

**Exemples**

1. Suites arithmétiques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $a$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + na$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = \frac{1}{2}(l+1)(u_k + u_{k+l})$$

2. Suites géométriques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = u_k \frac{1-q^{l+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = u_k(l+1) \text{ si } q = 1$$

3. Suites arithmético-géométriques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour l'étude de ce type de suites, si $a \neq 1$, on pourra utiliser le réel $\frac{b}{1-a}$ unique point fixe de l'application $x \mapsto ax + b$. On peut ainsi vérifier que la suite $(u_n - \frac{b}{1-a})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a\big(u_n - \frac{b}{1-a}\big)$$

**Suites récurrentes d'ordre k**

Soit $E$ un ensemble non vide. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre k si on peut la définir de la manière suivante :

$$\begin{cases} (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \in E^k \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}) \end{cases}$$

où$f$ est une application définie sur $E^k$ à valeurs dans $E$.

## 1.6 Suites réelles récurrentes d'ordre 1

### 1.6.1 Propriétés

Soit $I$ un intervalle réel, $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**Proposition**

1. Si l'application $f$ est croissante sur $I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Si l'application $f$ est décroissante sur $I$, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposé.

**Proposition**

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $l$ appartenant à $I$ et si $f$ est continue en ce point, alors $l$ est un point fixe pour l'application $f$.

### 1.6.2 Points fixes attractifs - Points fixes répulsifs

**Proposition**

Soient $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ et $l$ un point fixe de $f$ appartenant à l'intérieur de $I$. Si $f$ est dérivable en $l$ avec $|f'(l)| < 1$, on dit que $l$ est un point attractif de $f$. Il existe un réel $\alpha$ strictement positif tel que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in ]l-\alpha, l+\alpha[ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est définie et converge vers $l$.

**Proposition**

Soient $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ et $l$ un point fixe de $f$ appartenant à l'intérieur de $I$. Si $f$ est dérivable en $l$ avec $|f'(l)| > 1$, on dit que $l$ est un point répulsif de $f$. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe répulsif $l$, alors elle est stationnaire. Si, de plus, l'application $f$ est injective alors elle est constante.

## 1.7 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

### 1.7.1 Définition

On appelle suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note $E_{a,b}$ l'ensemble de telles suites.

### 1.7.2 Structure et dimension de $E_{a,b}$

$E_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

### 1.7.3 Expression des éléments de $E_{a,b}$

On commence par chercher si $E_{a,b}$ contient des suites géométriques.
L'équation $r^2 - ar - b$ est appelée équation caractéristique. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation. Plusieurs cas peuvent se présenter :

**Premier cas**

L'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$ dans $\mathbb{K}$ (cela revient à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$). Alors il existe $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

On calcule $\lambda_1$ et $\lambda_2$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $r_1$ et $r_2$.

**Deuxième cas**

L'équation caractéristique admet une seule solution $r$ dans $\mathbb{K}$ (cela revient à $\Delta = 0$). Alors il existe $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$u_n = (\lambda_1 + n\lambda_2)r^n$$

On calcule $\lambda_1$ et $\lambda_2$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $r$.

**Troisième cas**

L'équation caractéristique n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$ (cela revient à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$). Cette équation admet deux racines distinctes conjuguées $r_1$ et $r_2$ dans $\mathbb{C}$. Il existe alors $A$ et $B$ réels tels que

$$u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$$

où $\rho = |r_1|$ et $\theta = \arg r_1$. On calcule $A$ et $B$ à l'aide de $u_0$, $u_1$, $\rho$ et $\theta$.

## 1.8 Vitesse de convergence d'une suite réelle

### 1.8.1 Définition

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel $l$.

1. On suppose que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}$ est convergente. On note $\lambda$ sa limite.
   (a) Si $|\lambda| = 1$, on dit que la convergence est lente.
   (b) Si $|\lambda| \in ]0, 1[$, on dit que la convergence est géométrique de rapport $\lambda$.
   (c) Si $\lambda = 0$, on dit que la convergence est rapide.
2. Soit $r$ un réel strictement supérieur à 1. On dit que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre $r$ si la suite $\frac{u_{n+1}-l}{|u_n-l|^r}$ est bornée. On remarque que dans ce cas, la convergence est rapide.

### 1.8.2 Suites convergeant vers un point attractif

On considère $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ convergeant vers $l$ un point fixe attractif de $f$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \neq l$. On a

$$\lim_{t\to l} \frac{f(t) - l}{t - l} = f'(l)$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $l$ ; on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = f'(l)$$

1. Si $f'(l) \neq 0$, la vitesse de convergence de la suite est géométrique de rapport $f'(l)$.

2. Si $f'(l) = 0$, la vitesse de convergence de la suite est rapide. Si on suppose de plus que l'application $f$ est $p$ fois dérivable en $l$ ($p \geq 2$) avec

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\ f^{(k)}(l) = 0, \text{ et } f^{(p)}(l) \neq 0$$

la formule de Taylor-Young à l'ordre $p$ permet d'écrire :

$$\lim_{t \to l} \frac{f(t) - l}{(t-l)^p} = \frac{f^{(p)}(l)}{p!}$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - l}{(u_n - l)^p} = \frac{f^{(p)}(l)}{p!}$$

La vitesse de convergence de la suite vers $l$ est alors d'ordre $p$.

# 1.9 Accélération de la convergence d'une suite

## 1.9.1 Définitions

**Définitions**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes vers le même réel $l$, on dit que la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus élevée que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $v_n - l = o(u_n - l)$.

**Définition**

Accélérer la convergence d'une suite consiste à construire à partir de cette dernière une autre suite qui converge plus vite vers la même limite.

## 1.9.2 Méthode d'accélération de Richardson

**Théorème : Méthode d'accélération de Richardson**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l$, avec une convergence géométrique de rapport $\lambda$, $|\lambda| \in ]0, 1[$. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$ plus vite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On regarde maintenant la vitesse de convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposition**

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = l + a\lambda^n + o(\lambda^n)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et $|\lambda| \in ]0, 1[$. Alors $(u_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ converge vers $l$ avec une convergence géométrique de rapport $\lambda$.

**Proposition**

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = l + a\lambda^n + b\mu^n + o(\mu^n)$$

avec $a$ et $b$ réels non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ accélérée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la méthode de Richardson admet un développement asymptotique de la forme :

$$v_n = l + b'\mu^n + o(\mu^n)$$

où $b'$ est un réel non nul. La convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $l$ est géométrique de rapport $\mu$.

**Remarque :** on peut itérer la méthode de Richardson.

### 1.9.3 Méthode d'accélération d'Aitken

On considère une suite $(u_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ qui converge vers $l$. On suppose que pour tout n, $u_n \neq l$ et $u_{n+1} \neq u_n$. On suppose également que la suite est géométrique mais que l'on ne connaît pas le rapport $\lambda$. Ceci se produit par exemple pour la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \cos x$. Dans ce cas, la limite $l$ est un point fixe attractif mais on ne connaît pas $f'(l)$. Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence géométrique de rapport $f'(l)$.

**Proposition**
La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \geq 1,\ \lambda_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}$ converge vers $\lambda$.
**Remarque :** Puisque $\lambda \neq 1$, on peut trouver un rang $n_0$ tel si $n \geq n_0$ alors $\lambda_n \neq 1$.
**Théorème : Méthode d'accélération d'Aitken**
On considère la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0,\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1 - \lambda_n}$$

La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une accélération de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# Chapitre 2

# Séries Numériques

## 2.1 Généralités

**Définition**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel $E$. On appelle série de terme général $u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

On note cette série $\sum u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ s'appelle le terme d'indice $n$, $S_n$ s'appelle la somme partielle d'indice $n$ de la série $\sum u_n$.

Lorsque $E$ est un espace vectoriel normé, on dit que $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. dans ce cas, la limite s'appelle la somme de la série et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'indice $n$, l'élément $R_n$ défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Exemples :**

1. Séries arithmétiques. Les séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} na$ où $a$ est une constante complexe sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$. Les sommes partielles de la série sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} ka = a\frac{n(n+1)}{2}$$

2. Séries géométriques. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ où $q$ est un nombre complexe, convergent si et seulement si, $|q| < 1$. Les sommes partielles sont données par

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1 \text{ si } q = 1$$

Si $|q| < 1$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}$$

### 2.1.1 Critère de Cauchy pour les séries

**Proposition**
Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace de Banach converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_n + \ldots + u_{n+p}\| < \epsilon$$

**Corollaire**
Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
La réciproque est fausse.

### 2.1.2 Séries absolument convergentes

**Théorème**
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si la série $\sum \|u_n\|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente, et dans ce cas, la série $\sum u_n$ est convergente.

## 2.2 Séries réelles à termes positifs

**Théorème**
Un série $\sum u_n$ à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in n\mathbb{N}}$ des sommes partielles est bornée.
**Théorème**
On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ; si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.
**Théorème**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes positifs.

1. Si $v_n = O(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$ et $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2. Si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

**Théorème : Séries de Riemann**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

### 2.2.1 Équivalents des sommes partielles et des restes

**Théorème**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors

1. Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k,\ n \to +\infty$$

2. Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=O}^{n} v_k,\ n \to +\infty$$

### 2.2.2 Comparaison Série-intégrale

**Proposition**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = f(0) + f(1) + \ldots + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

### 2.2.3 Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries numériques de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Alors

$$\Big(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \text{ converge}\Big) \Leftrightarrow ((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1))$$

## 2.3 Comparaison logarithmique pour les séries réelles à termes positifs

**Proposition**
On considère deux suites réelles positives $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose qu'à partir d'un certain rang $n_0$, $u_n$ et $v_n$ sont strictement positifs, et vérifient : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Alors $u_n = O(v_n)$, et donc la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$.

### 2.3.1 Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

1. Si pour un certain $a$ tel que $0 < a < 1$, on a $u_{n+1} \leq a u_n$ alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite $a$ telle que $0 < a < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite $a$ telle que $a > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. On a même $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$.

### 2.3.2 Règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\overline{\lim}(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$
2. Si $\overline{\lim}(u_n)^{\frac{1}{n}} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Si $\overline{\lim}(u_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

**Proposition**
Si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite $a$, $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ admet aussi $a$ pour limite.

### 2.3.3 Règle de Raabe-Duhamel

**Proposition**

Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe un réel $\alpha$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\big(n\big(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\big)\big)=-\alpha \text{ c'est à dire } \frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o(\frac{1}{n})$$

Alors la série $\sum u_n$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha<1$.

**Proposition**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^2})} \quad n\to+\infty$$

Alors il existe $\lambda>0$ tel que $u_n\sim\frac{\lambda}{n^\alpha}$ lorsque $n\to+\infty$

Cette règle permet de déterminer la nature de la série $\sum u_n$. Elle converge si et seulement si $\alpha>1$

## 2.4 Séries réelles semi-convergentes

### 2.4.1 Séries alternées

**Définition**

Soit une série $\sum u_n$. On dit qu'elle est alternée si et seulement si il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n$, on a $u_n=(-1)^n a_n$, ou bien $u_n=(-1)^{n+1}a_n$.

**Proposition**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge. Sa somme vérifie $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}\leq S\leq S_{2p}$ ; et les restes vérifient $\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n|\leq a_n$.

### 2.4.2 Règle d'Abel

**Théorème**

Soit une série $\sum u_n$. On suppose que pour tout $n$, $u_n=\alpha_n v_n$ où

- $(\alpha_n)$ est une suite positive, décroissante, tendant vers 0.
- La série $\sum v_n$ est bornée.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

## 2.5 Produit de Cauchy de deux séries numériques

**Définition**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On définit le produit de Cauchy des ces deux séries comme la série de terme général $w_n$ où

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}$$

**Théorème**

Soient deux séries absolument convergentes de sommes respectives $U$ et $V$. Alors leur produit de Cauchy est une série absolument convergente de somme $U\cdot V$.

# Chapitre 3

# Dérivation - Formules de Taylor Développements limités - Fonctions convexes

## 3.1 Fonctions dérivables

### 3.1.1 Dérivabilité

**Définition**

Soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to E$ une application et $a \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $a$ si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $f'(a)$.

On dit que $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a,\, x \in I}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left( \lim_{\substack{x \to a \\ x > a,\, x \in I}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

existe. On la note alors $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

**Remarques :**

1. $f$ est dérivable en $a$ intérieur à $I$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$ et les dérivées à gauche et à droite coïncident.
2. Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.
3. Sur l'ensemble $D$ des points où $f$ est dérivable, on peut définir l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ appelée application dérivée de $f$.
4. Une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue. Il suffit de considérer par exemple la fonction suivante définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Par récurrence, on peut définir la dérivée n-nième (lorqu'elle existe) de la fonction $f$, par

$$f'' = (f')',\ f^{(3)} = (f'')', \ldots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

**Définition**

Une application $f : I \to E$ est dite de classe $C^n$ si $f^{(n)}$ existe sur $I$ et est continue. Lorsque $f$ est de classe $C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ est de classe $C^\infty$.

**Proposition**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux applications dérivables en $a \in I$. Alors

1. $f+g$ est dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f$ est dérivable en $a$ et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
3. Si $E$ est une $\mathbb{R}$-algèbre normée, l'application $fg$ est dérivable en $a$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$ et si $g(a) \neq 0$, alors $f/g$ est dérivable en $a$ et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

**Proposition :** Formule de Leibnitz

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$), $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $f^{(n)}(a)$ existent. Alors le produit $fg$ est dérivable en $a$ et

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

**Proposition**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $f : J \to E$ et $g : I \to J$ deux applications et $a \in I$ tel que $g$ est dérivable en $a$ et $f$ est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en $a$ et $(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot (f' \circ g)(a)$.

**Proposition**

Soit $f$ une bijection de $I$ dans $J$, dérivable en $a \in I$. L'application $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))})$$

### 3.1.2 Résultats relatifs à la dérivabilité pour les fonctions à valeurs réelles

**Proposition**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si $f$ admet un extremum relatif en $c \in \mathring{I}$ et $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

**Théorème de Rolle**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

1. $f$ est continue sur $[a, b]$.
2. $f$ est dérivable sur $]a, b[$.
3. $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in ]a, b[,\ f'(c) = 0$.

**Théorème des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**Remarque** : Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux lorsque $f$ est à valeurs dans un espace vectoriel normé.

**Théorème des accroissements finis généralisé**

Soient $f$ et $g$ deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$. Si $g'(c) \neq 0$ et $g(a) \neq g(b)$, cette égalité s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

**Conséquence : Règle de l'Hospital** Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)/g'(x)$ existe, alors on a $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)/g(x) = l$.

**Remarque** : La réciproque à la règle de l'Hospital est fausse.

**Théorème : Formule de Taylor-Lagrange**

Soit $f : [a, b]$ une application de classe $C^n$ sur $[a, b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in ]a, b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\textit{reste de Lagrange}}$$

### 3.1.3 Résultats relatifs à la dérivabilité pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

**Théorème**
Soient $F : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in ]a, b[$, on a $\|F'(t)\| \leq g'(t)$, alors $\|F(b) - F(a)\| \leq g(b) - g(a)$.
**Théorème : Inégalités des accroissements finis**
Soit $F[a, b] \to E$ une applications continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M$ tel que pour tout $t \in ]a, b[$, on a $\|F'(t)\| \leq M$, alors $\|F(b) - F(a)\| \leq M(b - a)$.
**Proposition** Soit $F : [a, b] \to E$ une application continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F'(t)$ existe. Alors $F$ est dérivable à droite en $a$ et $F'_d(a) = l$.
**Remarque :** La fonction $F'$ est continue en $a$.
**Définition**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est $k$-lipschitzienne $k > 0$ si et seulement si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

**Proposition**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur $I$. Pour que $f$ soit lipschitzienne, il faut et il suffit que $f'$ soit bornée sur $I$.
**Théorème : Inégalité de Taylor-Lagrange**
Soit $F : [a, b] \to E$ une application de classe $C^n$ sur $[a, b]$, $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in ]a, b[,\ \|F^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors

$$\|F(b) - F(a) - (b - a)F'(a) - \ldots - \frac{(x - a)^n}{n!} F^n(a)\| \leq M \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

**Théorème : Formule de Taylor-Young**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $E$, de classe $C^n$ sur $I$. Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \to 0$, on a :

$$F(a + h) = F(a) + hF'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

**Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et une application $F : [a, b] \to E$ de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$ où $E$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Alors

$$F(b) = F(a) + (b - a)F'(a) + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\, dt$$

## 3.2 Développements limités

### 3.2.1 Relations de comparaison

Soit $X$ un espace métrique. On considère deux applications $f$ et $g$ de $D \subset X$ dans $E$ espace vectoriel normé et $x_0$ un point d'accumulation de $D$.

1. On dit que $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $x_0$ si

$$\exists C > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_{x_0},\ \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$$

   où $\mathcal{V}_{x_0}$ désigne l'ensemble des voisinages de $x_0$. On note alors $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$.
2. On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $x_0$ si

$$\exists \epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_{x_0},\ \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq \epsilon\|g(x)\|$$

   où $\mathcal{V}_{x_0}$ désigne l'ensemble des voisinages de $x_0$. On note alors $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$.
3. On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $x_0$ si $f(x) - g(x) = o(g(x))$. On écrit alors $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$.

**Remarque :** Il faut faire attention car la relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition. Elle est compatible avec le produit et la puissance.

### 3.2.2 Développements asymptotiques

**Définition**

Soit $X$ un espace métrique et $x_0 \in X$. On appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de $x_0$ sauf éventuellement en $x_0$ et vérifiant la propriété suivante : si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ou $f = o(g)$ ou $f = O(g)$.

**Remarque :** Au voisinage de $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle les échelles, les plus courantes sont les suivantes :
- celles constituées des fonctions de type $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
- celles constituées des fonctions de type $x^\alpha(\ln x)^\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- celles constituées des fonctions de type $x^\alpha(\ln x)^\beta e^{cx^\gamma},\ \alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$.

Au voisinage de 0, une échelle de comparaison courante est celle contenant les fonctions de type $x^\alpha(\ln x)^\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Définition**

Soit $X$ un espace métrique. Soient $f : D \subset X \to E$ une application, $x_0$ un point d'accumulation de $D$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle développement asymptotique à $k$ termes de $f$ par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de $x_0$, toute expression de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_k$ vérifiant :

1. $c_1, c_2, \ldots, c_k \in E$ sont des constantes multiplicatives.
2. $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{E}$ avec pour tout $i$, $f_{i+1}(x) = o(f_i(x)),\ x \to x_0$.
3. $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_k f_k(x) = o(f_k(x)), x \to x_0$.

Lorsqu'un tel développement existe, il est unique. On a $f(x) \sim c_1 f_1(x)$. On dit que $c_1 f_1$ est la partie principale de $f$.

### 3.2.3 Développements limités

**Définition**

On considère $I$ un intervalle, $a$ un point de $I$ et $f : I \to E$. On dit que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$ s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de $a$, on ait :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Le polynôme $P$ défini par $P(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_n(x - a)^n$ est appelée partie régulière du développement limité.

**Remarque** : Dans la suite, sans perte de généralité, on supposera $a = 0$.

**Proposition**

Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n$, il est unique.

**Proposition**

Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0, alors $f(0) = a_0$, $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

**Remarque :** Même lorsque $f$ admet un développement d'ordre 2, cela n'assure pas l'existence de $f''(0)$.

**Proposition**

Soit $a > 0$ et $f :] - a, a[\to E$ une application admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

- Si $f$ est paire, tous les termes $a_k$ d'indices $k$ impairs sont nuls.
- Si $f$ est impaire, tous les termes $a_k$ d'indices $k$ pairs sont nuls.

**Proposition**

Si $f : I \to E$ est une application $n$ fois dérivable, alors $f$ admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n$ suivant :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} + o(x^n)$$

### 3.2.4 Opérations sur les développements limités

**Proposition : Intégration terme à terme**
Soit $f : I \to E$ (avec $0 \in I$) une application dérivable sur $I$ telle qu'au voisinage de 0

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors l'application admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n + 1$ suivant

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} + o(x^{n+1})$$

**Proposition : Dérivation d'un développement de Taylor**
Soit $f : I \to E$ (avec $0 \in I$) une application $n \geq 2$ fois dérivable en 0. Si au voisinage de 0 on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors au voisinage de 0,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

**Proposition : Somme, produit, quotient de développements limités**
Soient $f$ et $g : I \to E$, (avec $0 \in I$) deux applications admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n$ :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où $P_n$ et $Q_n$ sont deux fonctions polynomiales de degré $\leq n$. Alors

1. La somme $f + g$ admet un développement limité d'ordre $n$ donné par $(f + g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$.
2. Si $E$ est une algèbre normée, le produit $fg$ admet un développement limité d'ordre $n$ donné par $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où $R_n$ est le reste de la division euclidienne de $P_n Q_n$ par $X^{n+1}$ : $P_n Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$ avec deg($S_n$)$\leq n$.
3. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$ et que $g(0) = Q(0) \neq 0$, le quotient $f/g$ admet un développement limité d'ordre $n$ donné par $(f/g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où $R_n$ est le quotient de la division selon les puissances croissantes de $P_n$ par $Q_n$ à l'ordre $n$.

**Proposition : Développement limité d'une fonction composée**
Soient $g : I \to \mathbb{R}$ (avec $0 \in I$) une application admettant un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0, et $f : J \to E$ (où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel $g(I) \subset J$) une application admettant un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $g_0 = g(0)$. On écrit au voisinage de 0

$$g(x) = g_0 + P_n(x) + o(x^n), \quad f(g_0 + t) = Q_n(t) + (t^n)$$

où $P_n$ et $Q_n$ sont deux polynômes de degré $\leq n$ avec $P_n(0) = 0$. Alors la fonction composée $f \circ g$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n$ : $f \circ g(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où $R_n$ est le reste de la division euclidienne de $P_n \circ Q_n$ par $X^{n+1}$ ($P_n \circ Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$).

## 3.3 Fonctions convexes

### 3.3.1 Définitions - Propriétés

$I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
**Définition**
Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall (a, b) \in I^2, \ \forall \lambda \in [0, 1], \ f\big((1 - \lambda)a + \lambda b\big) \leq (1 - \lambda) f(a) + \lambda f(b) \quad (*)$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.
**Remarques**

1. La fonction $f$ est convexe si et seulement si l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ est convexe.
2. L'inégalité $(*)$ exprime le fait que tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))[$ sont au-dessus du graphe de $f$.

**Proposition**
Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors

$$\forall x_1, \ldots x_n,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n,\ f\big(\frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n x_n}\big) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n x_n}$$

**Proposition**
Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application

$$g_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

**Conséquence**
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si avec $a < b < c$ on a l'inégalité suivante entre les taux de variation

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

**Proposition**
Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$ (pas forcément aux bornes de $I$). De plus, les applications $f'_g$ et $f'_d$ sont croissantes sur $\mathring{I}$ et pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

**Théorème**
Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est convexe.
2. $f'$ est croissante.
3. La courbe représentative de $f$ est au-dessus de ses tangentes.

**Corollaire**
Une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe deux fois dérivable est convexe si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$.

### 3.3.2 Inégalités classiques

**Théorème : Inégalité arithmético-géométrique**
Pour tous nombres réels positifs $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

**Théorème : Inégalité de Hölder**
Soit deux réels $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous réels positifs $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{1/q}$$

**Remarque** : Lorsque $p = 2$ et $q = 2$, on retrouve l'inégalité de Schwarz.
**Théorème : Inégalité de Minkowsy**
Soit $\geq 1$ et $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels positifs. Alors

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{1/p}$$

# Chapitre 4

# Intégration - Primitives - Calcul d'intégrales

## 4.1 Définition et propriétés

### 4.1.1 Intégrale des fonctions en escalier

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle $[a, b]$ non réduit à un point. On peut généraliser pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet.

**Définition**

On appelle subdivision de $[a, b]$ toute partie finie de $[a, b]$ contenant $a$ et $b$. Soit $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$. On peut écrire $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On appelle pas ou module de la subdivision $\sigma$ et on note $|\sigma|$ le réel $\sup_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.

**Définition**

Une application $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, x_n\}$, $\varphi$ soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision est dite alors bien adaptée à $\varphi$. On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions en escalier sur $[a, b]$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

**Définition :** Intégrale d'une fonction en escalier.

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction en escalier. Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ bien adaptée à $\varphi$, telle qu'il existe des constantes $c_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$ avec $\varphi(x_i) = c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i$ est indépendante du choix de $\sigma$ adaptée à $\varphi$. On la note $I(\varphi)$ où $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ et on l'appelle intégrale de $\varphi$ sur $[a, b]$.

**Proposition**

Si $\varphi$ et $\psi$ sont des foncions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $I(\lambda\varphi + \psi) = \lambda I(\varphi) + I(\psi)$ (Linéarité de l'intégrale).
2. $\forall c \in ]a, b[,\ I_{[a,b]}(\varphi) = I_{[a,c]}(\varphi) + I_{[c,b]}(\varphi)$ (Relation de Chasles).
3. $|I(\varphi)| \leq I(|\varphi|)$.
4. Si $\varphi$ est réelle et positive sur $[a, b]$ alors $I(\varphi) \geq 0$ (Positivité de l'intégrale).
5. Si $\varphi$ et $\psi$ sont réelles avec $\varphi \leq \psi$ sur $[a, b]$ alors $I(\varphi) \leq I(\psi)$.
6. Si $m$ et $M$ sont respectivement un minorant et un majorant de la fonction réelle $\varphi$ sur $[a, b]$, alors $m(b - a) \leq I(\varphi) \leq M(b - a)$.
7. $|I(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty(b - a)$ (Continuité de l'intégrale par rapport à $\varphi$).

### 4.1.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

On rappelle que si on note $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, l'espace $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Ainsi toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur

$[a, b]$. Soit $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. On définit alors l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ comme la limite de la suite $I(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le lemme suivant assure que la limite existe et ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Lemme**

Soit $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. Alors la suite $I(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Définition**

Soit $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. On appelle intégrale e $f$ sur $[a, b]$ la limite de la suite $I(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette intégrale est notée $\int_a^b f(t)\,dt$.

**Proposition**

Soit $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$. En modifiant $f$ sur un ensemble fini de points de $[a, b]$, on obtient une fonction continue par morceaux $\tilde{f}$ telle que $\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

**Proposition**

Si $f$ et $g$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $I(\lambda f + g) = \lambda I(f) + I(g)$ (Linéarité de l'intégrale).
2. $\forall c \in ]a, b[,\ I_{[a,b]}(f) = I_{[a,c]}(f) + I_{[c,b]}(f)$ (Relation de Chasles).
3. $|I(f)| \leq I(|f|)$.
4. Si $f$ est réelle et positive sur $[a, b]$ alors $I(f) \geq 0$ (Positivité de l'intégrale).
5. Si $f$ et $g$ sont réelles avec $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $I(f) \leq I(g)$.
6. Si $m$ et $M$ sont respectivement un minorant et un majorant de la fonction réelle $f$ sur $[a, b]$, alors $m(b - a) \leq I(f) \leq M(b - a)$.
7. $|I(f)| \leq \|f\|_\infty(b - a)$ (Continuité de l'intégrale par rapport à $f$).

**Théorème**

Soit $f$ continue et positive sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f$ est nulle sur $[a, b]$.

**Théorème**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ Alors

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)$$

2. Inégalité de Minkowsky :

$$\sqrt{\int_a^b |f(t) + g(t)|^2\,dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\,dt}$$

## 4.2 Sommes de Riemann

Soit $f$ bornée sur $[a, b]$, $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ et $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n\}$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

**Définition**

On appelle somme de Riemann de $f$ relative à $(\sigma, \theta)$ la somme $S(f, \sigma, \theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\theta_i)$

**Remarques :**

1. Il existe une infinité de sommes de Riemann de $f$.
2. Si $f$ est une fonction en escalier et si $\sigma$ est une subdivision bien adaptée à $f$, alors on a $S(f, \sigma, \theta) = \int_a^b f(t)\,dt$.

**Théorème**

Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute somme de Riemann $S(f, \sigma, \theta)$, on ait $|\sigma| < \alpha \Rightarrow \left|S(f, \sigma, \theta) - \int_a^b f(t)\,dt\right| < \epsilon$.

**Remarque :** On utilise souvent ce théorème dans le cas d'une subdivision où le pas est constant : $|\sigma| = \frac{b-a}{n}$. Dans ce cas, $\sigma$ est déterminée par l'entier $n$ puisque $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Si $\theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, une somme de Riemann s'écrit $S(f, \sigma, \theta) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)$. En reprenant les notations du théorème, on a pour $n > \frac{b-a}{\alpha}$

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) - \int_a^b f(t)\,dt\right| < \epsilon$$

On a aussi :
**Théorème**
Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

## 4.3 Formules de la moyenne

**Définition**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ On appelle moyenne de $f$ sur $[a, b]$ le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.
**Théorème : Formule de la moyenne**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur $[a, b]$. On suppose $g$ positive.

1. Si $m$ et $M$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $f$ sur $[a, b]$, alors

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$$

2. Si, de plus $f$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

**Corollaire**
Soit $f$ une fonction à valeurs réelles continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $m$ et $M$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $f$ sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M(b-a)$.
**Théorème : Seconde formule de la moyenne**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur $[a, b]$. On suppose $f$ positive, décroissante. Alors $\exists c \in [a, b],\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a^+)\int_a^c g(t)\,dt$.

## 4.4 Primitives et intégrales

**Définition**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On appelle primitive de $f$ sur $I$, toute application $F : I \to \mathbb{K}$ qui est dérivable sur $I$ et telle que $F' = f$.
**Proposition**
Si $f$ admet $F$ pour primitive sur $I$, alors

1. Toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $t \mapsto F(t) + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.
2. Pour tout réel $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive $\phi$ de $f$ sur $I$ telle que $\phi(t_0) = y_0$. Elle est définie par $\phi(t) = F(t) - F(t_0) + y_0$.

**Remarque** : La proposition précédente n'assure pas l'existence d'une primitive. Dans le cas des fonctions continues par morceaux, le lien entre primitive et intégrale est donné par le théorème suivant :
**Théorème**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$. On définit la fonction $F$ sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors

1. $F$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.

2. Si $f$ est réelle positive, $F$ est croissante.
3. En tout point $t_0$ où $f$ est continue, $F$ est dérivable avec $F'(t) = f(t)$.

**Corollaire**
Soit $f$ continue sur un intervalle $I$. Alors pour tout réel $x_0 \in I$, l'application

$$F : \begin{array}{rl} I \to & \mathbb{K} \\ x \mapsto & \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \end{array}$$

est la primitive de $f$ qui s'annule en $x_0$.

**Corollaire**
Soit $f$ continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ et $F$ une primitive de $F$ sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

## 4.5 Calcul d'intégrales

Il faut connaître les primitives des fonctions usuelles. Voici quelques rappels :

TABLE 4.1 –

| f(t)= | F(t)= | I= |
|---|---|---|
| $\frac{1}{(t-a)^n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ | $\frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$ | $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ |
| $\frac{1}{t^2+a^2},\ a \in \mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}},\ a \in \mathbb{R}_+^*$ | $\arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$ | $]-a, a[$ |
| $\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}},\ a \in \mathbb{R}^*$ | $\ln(t + \sqrt{t^2 + a^2})$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}},\ a \in \mathbb{R}_+^*$ | $\ln\lvert t + \sqrt{t^2 - a^2})\rvert$ | $]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$ |
| $\frac{1}{\sin t}$ | $\ln\lvert\tan\left(\frac{t}{2}\right)\rvert$ | $]k\pi, (k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\frac{1}{\cos t}$ | $\ln\lvert\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\rvert$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$ |

### 4.5.1 Intégration par parties

Soient $u$ et $v$ des fonctions complexes de classe $C^1$ dans $I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a, b \in I$, on a $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$.

### 4.5.2 Changement de variable

**Théorème**
Soit $u \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors pour toute fonction $f$ continue sur le segment $u([a, b])$, on a

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx$$

**Remarque :** L'application " changement de variable $u$ " n'est pas supposée bijective et le segment $u([a, b])$ n'a pas toujours pour extrémités $u(a)$ et $u(b)$. Ainsi pour calculer $\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos^5 t\,dt$, on considère le changement de variable $u(t) = \sin t$ puisque $\cos^5 t = (1 - \sin^2 t)^2 \cos t$. On a alors : $f(x) = (1 - x)^2$, $u([-2\pi, \frac{\pi}{6}]) = [-1, 1]$, $u(-2\pi) = 0$, $u(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. D'où $\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos^5 t\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)^2\,dx = \ldots = \frac{203}{480}$.
Cependant, dans le cas particulier où $u$ est une bijection de $[a, b]$ sur $J$. Le segment $J = u([a, b])$ a pour extrémités $\alpha = u(a)$, $\beta = u(b)$. En effet $u$, dérivable, est obligatoirement strictement monotone et l'on a $J = [\alpha, \beta]$ pour $u$ croissante et $J = [\beta, \alpha]$ pour $u$ décroissante. Le théorème de changement de variable donne alors l'énoncé suivant :

**Corollaire**
Soit $\alpha < \beta$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to [\alpha, \beta]$ une bijection de classe $C^1$. Alors pour toute fonction complexe continue sur $[\alpha, \beta]$, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(u(t))u('t)\,dt$$

### 4.5.3 Quelques situations classiques

**Fractions rationnelles**

On commence par faire une décomposition en éléments simples. On aura alors des primitives en intégrant
- un polynôme (la partie entière) ;
- des fractions rationnelles du type $\frac{1}{(t-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (les éléments simples de première espèce ).
- des fractions rationnelles du type $\frac{At+B}{((t-a)^2+b^2)^n}$ avec $a, b, A, B$ réels, $b \neq 0$,$n \in \mathbb{N}^*$ (les éléments simples de deuxième espèce). Pour calculer $\int \frac{At+B}{((t-a)^2+b^2)^n}\,dt$, on pose $t-a=bx$, ce qui conduit à calculer les intégrales $\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$. Pour calculer $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$, on calcule $I_1$, puis à l'aide d'une intégration par parties, on obtient une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$, ce qui permet de calculer $I_n$ de proche en proche.

**Fractions rationnelles trigonométriques**

**Proposition : Règles de Bioche**
Soit $f(t) = R(\cos t, \sin t)$ où $R$ est une fraction rationnelle. On peut calculer $\int f(t)\,dt$ avec le changement de variable :

1. $u = \cos t$ lorsque $f$ est impaire.
2. $u = \sin t$ lorsque $f$ vérifie $f(\pi - t) = -f(t)$
3. $u = \tan t$ lorsque $f$ est $\pi$-périodique.

Lorsque les règles de Bioche ne s'appliquent pas, on peut transformer $R(\cos t, \sin t)$ en une fraction rationnelle de la variable $u = \tan\frac{t}{2}$. Dans ce cas, on a

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \tan t = \frac{2u}{1-u^2},\ dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

**Fractions rationnelles en $\mathrm{sh}x$ et $\mathrm{ch}x$.**

Il s'agit de calculer $I(x) = \int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)$ où $R$ est une fraction rationnelle. En pratique, on considère la primitive de $J$ définie par $J(x) = \int R(\sin x, \cos x)$ pour laquelle on essaie d'applique les règles de Bioche. Ceci conduirait à l'utilisation de l'un des changements de variables

$$u = \cos x,\ u = \sin x,\ u = \tan x,\ u = \tan\frac{x}{2}$$

On utilise alors le changement de variable correspondant pour les fonctions hyperboliques

$$u = \mathrm{ch}x,\ u = \mathrm{sh}x,\ u = \mathrm{th}x,\ \mathrm{th}\frac{x}{2}$$

**Fractions rationnelles en $x$ et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.**

On a $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. On effectue le changement de variable $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

**Fractions rationnelles en $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$.**

Après mise sous forme canonique de $ax^2+bx+c$ et changement de variable affine, on se ramène au calcul de $\int R(t, \sqrt{1+t^2})\,dt$ ou $\int R(t, \sqrt{1-t^2})\,dt$ ou $\int R(t, \sqrt{t^2-1})\,dt$, pour lequel on utilise le changement de variable $u = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ ou $u = \mathrm{arcsin} t$ ou $u = \ln(\epsilon t + \sqrt{t^2-1})$.

# Chapitre 5

# Intégrales généralisées

## 5.1 Définition de l'intégrale généralisée

### 5.1.1 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, b[$

**Définition**

Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Si l'application $F$ définie par

$$F: \begin{array}{ccc} [a, b[ & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\, dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)\, dt$ converge et on note

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge.

**Exemples :**

- Pour $a > 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

**Proposition**

Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Pour tout $c \in ]a, b[$, l'intégrale $\int_c^b f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\, dt$ l'est. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

### 5.1.2 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $]a, b]$

**Définition**

Soient $]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b < +\infty$) et $f : ]a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. Si l'application définie pour tout $x \in ]a, b]$ par

$$\int_x^b f(t)\, dt$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ converge et on note

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt$$

Dans la cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

**Exemple :**

$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

**Proposition**

Soient $]a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b < \infty$) et $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$. Pour tout $c \in ]a,b[$, l'intégrale $\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\,dt$ l'est. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

### 5.1.3 Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

**Définition**

Soient $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux sur ]a, b [. On suppose qu'il existe $c_0 \in ]a,b[$ tel que les intégrales

$$\int_a^{c_0} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{c_0}^b f(t)\,dt$$

soient convergentes. Alors pour tout réel $c \in ]a,b[$ les intégrales

$$\int_a^c f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,dt$$

convergent. on dit alors que $\int_a^b f(t),dt$ converge et on note

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{c_0} f(t)\,dt + \int_{c_0}^b f(t)\,dt$$

Cette valeur est indépendante du choix de $c_0 \in ]a,b[$.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

**Proposition**

Les propriétés élémentaires vérifiées par les intégrales sur un segment restent vraies pour les intégrales généralisées convergentes : linéarité, positivité.

## 5.2 Cas des fonctions positives

Nous donnons ici les propriétés des intégrales généralisées sur un intervalle $[a,b[$. On obtient des propriétés identiques pour des intégrales généralisées définies sur un intervalle $]a,b]$.

**Proposition**

Soit $f$ une application continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ et à valeurs réelles positives. Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si

$$\exists M \geq 0,\ \forall x \in [a,b[,\ \int_a^x f(t)\,dt \leq M$$

**Proposition**

Soient $f$ et $g$ deux applications continues par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ à valeurs réelles positives et vérifiant $0 \leq f \leq g$. Alors

1. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

**Proposition**

Soient $f$ et $g$ deux applications réelles positives. On suppose qu'au voisinage de $b$, on a $f = O_b(g)$ (resp. $f = o_b(g)$). Alors

1. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et $\int_x^b f(t)\,dt = O_b(\int_x^b g(t)\,dt)$ (resp. $\int_x^b f(t)\,dt = o_b(\int_x^b g(t)\,dt)$).
2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, $\int_a^b g(t)\,dt$ converge et $\int_a^x f(t)\,dt = O_b(\int_a^x g(t)\,dt)$ (resp. $\int_a^x f(t)\,dt = o_b(\int_a^x g(t)\,dt)$).

**Proposition**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles positives. On suppose qu'au voisinage de $b$, $f \sim_b g$. Alors

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.
2. (a) Si les intégrales convergent, $\int_x^b f(t)\,dt \sim_b \int_x^b g(t)\,dt$
   (b) Si les intégrales divergent, $\int_a^x f(t)\,dt \sim_b \int_a^x g(t)\,dt$

**Proposition : Intégrales de Bertrand**
Soient $\alpha, \beta$ des réels. Alors

$$\Big(\int_e^{+\infty} \frac{dt}{x^\alpha \ln^\beta t}\Big) \text{ converge} \iff \big((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big)$$

$$\Big(\int_0^{1/e} \frac{dt}{x^\alpha |\ln t|^\beta} \text{ converge} \iff \big((\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big)$$

# 5.3 Propriétés des intégrales généralisées

On a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## 5.3.1 Critère de Cauchy

**Proposition : Critère de Cauchy pour les intégrales**
Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux sur $[a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon,\ \exists c \in [a, b[,\ \forall (x, y) \in ([c, b[)^2,\ \Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big| < \epsilon$$

**Corollaire**
On considère $a < b$ vérifiant $a < b$. Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et bornée sur $[a, b[$. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

## 5.3.2 Intégrales absolument convergentes

**Proposition-Définition**
Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
On dit dans ce cas que l'intégrale généralisée de $f$ est absolument convergente. Si l'intégrale généralisée de $f$ est convergente mais non absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

## 5.3.3 Intégration par parties

**Proposition : Intégration par parties**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de classe $C^1$ sur $[a, b[$.

1. Si $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe, les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)f'(t)\,dt$ sont de même nature.
2. Si ces intégrales sont convergentes, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [\lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

### 5.3.4 Changement de variable

**Proposition : changement de variable**

Soit $u$ une application de classe $C^1$ bijective strictement croissante de l'intervalle $[a, b[$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta[$ et $f$ une application continue par morceaux sur l'intervalle $[\alpha, \beta[$ , à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

# Chapitre 6

# Suites et séries de fonctions

## 6.1 Définitions

**Définition**
Soient $X$ un ensemble, $(E, d)$ un espace métrique, et $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $E$

1. On dit que $(f_n)$ converge **simplement** sur $X$ vers $f : X \to E$ si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

2. On dit que $(f_n)$ converge **uniformément** sur $X$ vers $f : X \to E$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X\ \ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

**Remarque :** La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

### 6.1.1 Critère de Cauchy uniforme

**Proposition**
Une suite de fonctions d'un ensemble $X$ vers un espace métrique complet $(E, d)$ converge uniformément sur $X$ si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N,\ \forall q \geq N,\ \forall x \in X,\ \ d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$$

### 6.1.2 Caractérisation de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions

**Définition** (Norme de la convergence uniforme)
Soit $X$ un ensemble et $E$ un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de $X$ dans $E$. Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

fait de $\mathcal{B}(X, E)$ un espace vectoriel normé. Cette norme est appelée norme de la convergence uniforme. Une suite $(f_n)$ de $\mathcal{B}(X, E)$, regardée comme une suite de fonctions de $X$ dans $E$, converge uniformément sur $X$ vers $f \in \mathcal{B}(X, E)$ si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ (i.e. si $f_n \to f$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$).

**Remarque :** Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $\mathcal{B}(X, E)$ et si $E$ est un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet) ; la condition suffisante de la proposition précédente s'énonce de la façon suivante : si $(f_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, E)$, alors $(f_n)$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to E$. L'espace $\mathcal{B}(X, E)$ est aussi un espace de Banach.

### 6.1.3 Séries de fonctions - Convergence normale

Comme pour les séries numériques, une série de fonctions $\sum g_n$ est définie comme étant la suite de fonctions $(f_n)$ avec $f_n = g_0 + g_1 + \ldots + g_n$.

**Définition**

Soit $X$ un ensemble et $E$ un espace de Banach. On dit qu'une série de fonctions $\sum g_n$ à termes dans $\mathcal{B}(X, E)$ converge **normalement** si la série $\sum \|g_n\|$ converge.

**Remarque :** Il est équivalent de dire que la série $\sum g_n$ converge normalement s'il existe une série à termes positifs $\sum a_n$ convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\quad \|g_n(x)\| \leq a_n$$

**Théorème**

Une série de fonctions $\sum g_n$ à valeurs dans un espace de Banach qui converge normalement sur un ensemble $X$ converge uniformément sur $X$.

## 6.2 Propriétés des suites de fonctions

### 6.2.1 Continuité de la fonction limite

**Théorème**

Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ deux espaces métriques et $(f_n)$ une suite de fonctions de $E$ dans $f$. Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f : E \to F$ et si toutes les fonctions $(f_n)$ sont continues en $x_0$ alors $f$ est continue en $x_0$.

### 6.2.2 Intégration d'une suite de fonctions

**Théorème**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $E$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

Les deux théorèmes suivants sont admis :

**Théorème de la convergence monotone**

Soit $(f_n)$ une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables (une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie) convergeant simplement vers une fonction $f$. Si les fonctions $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur tout segment de $I$, et si la suite des intégrales des $f_n$ est majorée, alors $f$ est intégrable sur $I$ et son intégrale est la limite de celle des $f_n$.

**Théorème de la convergence dominée**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur $I$ vers une fonction $f$. Si les fonctions $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur tout segment de $I$, et si la suite des modules des $f_n$ est majorée par une fonction $g$ intégrable sur $I$, alors $f$ est intégrable sur $I$ et son intégrale est la limite de celle des $f_n$.

**Théorème**

Soit une suite de fonctions $(f_n)$ définies et continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans un espace de Banach $E$. Si la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

### 6.2.3 Dérivabilité et dérivée de la fonction limite

**Théorème**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ à valeurs dans un espace de Banach $E$. On suppose que

1. Il existe un élément $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ soit convergente.
2. La suite de fonctions $(f'_n)$ converge uniformément sur $I$.

Alors

1. La suite $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$ de classe $C^1$ vérifiant $f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$.
2. Si l'intervalle $I$ est borné, la convergence est uniforme.

**Théorème**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ à valeurs dans un espace de Banach $E$. On suppose que

1. Il existe un élément $x_0 \in I$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge uniformément sur $I$.

Alors

1. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction $S$ de classe $C^1$ vérifiant

$$\forall x \in I,\ S' = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

2. Si l'intervalle $I$ est borné, la convergence est uniforme.

## 6.3 Théorème de Weierstrass

**Théorème**

Toute application continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

## 6.4 Convergences en moyenne

### 6.4.1 Définitions

On note $\mathcal{C}([a,],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

**Proposition**

Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $a < b$. L'application $\|.\|_1$ définie sur $\mathcal{C}([a,],\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ appelée norme 1.

**Définition**

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 1 vers une fonction $f$, on dit qu'elle converge en moyenne vers $f$.

**Proposition**

Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $a < b$. L'application $\langle .,. \rangle$ définie sur $\mathcal{C}([a,],\mathbb{R})^2$ par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2, \quad \langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

est produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. La norme associée est notée $\|.\|_2$ et est appelée norme 2.

**Définition**

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 2 vers une fonction $f$, on dit qu'elle converge en moyenne quadratique vers $f$.

### 6.4.2 Comparaison des différents types de convergence

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et une fonction $f$ élément de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
**Proposition**
Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

1. $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.
2. $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
3. $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

**Proposition**
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur le segment $[a,b]$ alors elle converge

1. simplement sur $[a,b]$.
2. en moyenne sur $[a,b]$.
3. en moyenne quadratique sur $[a,b]$.

**Proposition**
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $f$ sur le segment $[a,b]$, alors elle converge en moyenne vers $f$.

## 6.5 Critère d'Abel uniforme

**Théorème**
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans un espace de Banach $E$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles, toutes deux définies sur un intervalle $I$, vérifiant

1. $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \ \|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\| \leq M.$
2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 en décroissant.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ converge uniformément sur $I$.