Corrigé de la seconde épreuve de l'agrégation interne de mathématiques
Février 2000

Transformée de Laplace et théorème d'Ikehara

I. La transformée de Laplace

1. Un premier exemple

Dans cette question la fonction f est la fonction constante 1.

a) Soit α réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, puisqu'une primitive de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est :

$$\begin{cases} t & \text{si } \alpha = 0 \\ -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas $\mathcal{L}(f)(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

b) La limite $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-iX\beta}$ n'existe pas lorsque $\beta \neq 0$. En effet, il suffit de prendre deux suites de la forme $\left(\dfrac{2n\pi}{\beta}\right)_n$ et $\left(\dfrac{2n\pi+\pi/2}{\beta}\right)_n$.

c) Pour $s = \alpha + i\beta \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{-st}$ est $-\dfrac{1}{s}e^{-st}$ (pour $s = 0$, c'est t).

- si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-sX} = 0$ car $|e^{-sX}| = e^{-\alpha X}$.
- si $\alpha = 0$, la limite précédente n'existe pas (question b).
- si $\alpha < 0$, e^{-sX} n'admet pas de limite en $+\infty$ car $|e^{-sX}| = e^{-\alpha X}$, et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-\alpha X} = \infty$.

En résumé $\mathcal{L}(f)(s)$ existe si et seulement si $\Re e(s) > 0$. Dans ce cas $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s}$.

2. Abscisse de convergence

La fonction f est un élément quelconque de $\mathcal{C}$.

a) Soit $s \in \Pi(\alpha_0)$, c'est-à-dire $\Re e(s) > \alpha_0$. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-ts_0}f(t)dt$. La fonction f étant continue, F est de classe C^1 et pour tout $x, F'(x) = e^{-xs_0}f(x)$. De plus $F(0) = 0$.
Comme $s_0 \in \mathcal{DL}(f)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lambda_{s_0}$. Donc la fonction F reste bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $X > 0$. On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t)e^{-st}dt = \int_0^X f(t)e^{-ts_0}e^{-t(s-s_0)}dt &= \Big[F(t)e^{-t(s-s_0)}\Big]_0^X + \int_0^X (s-s_0)e^{-t(s-s_0)}F(t)dt \\ &= F(X)e^{-X(s-s_0)} + \int_0^X (s-s_0)e^{-t(s-s_0)}F(t)dt\end{aligned}$$

Comme F est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et $\Re e(s) > \Re e(s_0)$, il vient $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} F(X)e^{-X(s-s_0)} = 0$. Donc :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)e^{-st}dt = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X (s-s_0)e^{-t(s-s_0)}F(t)dt$$

Ainsi $\mathcal{L}(f)(s)$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X (s-s_0)e^{-t(s-s_0)}F(t)dt$ existe. Mais les mêmes raisons (F bornée sur $\mathbb{R}$ et $\Re e(s) > \Re e(s_0)$) montrent $t \mapsto e^{-t(s-s_0)}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc que cette limite existe. Il ne reste qu'à prendre la limite lorsque X tend vers l'infini pour obtenir le résultat demandé.

b) Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ diverge pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose $\sigma(f) = +\infty$.

S'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ converge, la question précédente montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge pour tout s tel que $\Re e(s) > \Re e(s_0)$. Il suffit alors de poser :

$$\sigma(f) = \inf\left\{\Re e(s) \mid \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ converge } \right\}$$

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose $\sigma(f) = -\infty$.

c) Soit $s = \alpha + i\beta$ tel que $\alpha > \sigma$. Alors $|e^{-ts}f(t)| = e^{-\alpha t}f(t)$. Soit γ tel que $\alpha > \gamma > \sigma$. Pour tout compact $J \subset \mathbb{R}^+$, il vient :

$$\int_J e^{-\alpha t}f(t)dt = \int_J e^{-t(\alpha-\gamma)}e^{-\gamma t}f(t)dt \leq \int_J e^{-\gamma t}f(t)dt \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\gamma t}f(t)dt$$

ce qui signifie que $t \mapsto e^{-ts}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3. Un second exemple

Si $\lambda \neq s$, une primitive de $t \mapsto e^{-st}e^{\lambda t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\lambda - s}e^{(\lambda-s)t}$. La question 1 montre que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{(\lambda-s)X}$ existe si et seulement si $\Re e(s) > \Re e(\lambda)$. Donc :

$$\sigma(f) = \Re e(\lambda) \text{ et } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-\lambda}$$

4. Propriétés de la transformée

a) On suppose que $\sigma(f) < +\infty$. On sait que si $s_0 \in \mathcal{DL}(f)$ et si $s \in \Pi(\sigma)$, alors :

$$\mathcal{L}(f)(s) = (s - s_0)\int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)}F(x)dx$$

La fonction $s \mapsto s - s_0$ est continue sur $\mathbb{C}$. La fonction F est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^+$ par M. La fonction $\Phi : (s, x) \to e^{-x(s-s_0)}F(x)$ est continue sur $\Pi(\sigma) \times \mathbb{R}^+$, et :

$$|\Phi(x, s)| \leq Me^{-x(\alpha-\alpha_0)} \leq Me^{-x(a-\alpha_0)}$$

pour tout s tel que $\Re e(s) = \alpha > a > \Re e(s_0) = \alpha_0$.
La fonction majorante ne dépend pas de s et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Les théorèmes de continuité des intégrales à paramètres affirment que $\mathcal{L}(f)$ est continue pour tout s tel que $\Re e(s) \geq a$. Donc, puisque la notion de continuité est une notion locale, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\Pi(\sigma)$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}$.

b) Si $s = \alpha + i\beta$, on pose :

$$L(\alpha, \beta) = \mathcal{L}(f)(s) = (s - s_0)\int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)}F(x)dx$$

La fonction $(\alpha, \beta) \mapsto s - s_0$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Soit :

$$\Psi : (\alpha, \beta, x) \mapsto e^{-x(s-s_0)}F(x)$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Elle admet des dérivées partielle par raport à α et β et :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, x) = -x\Psi(\alpha, \beta, x)$$

qui est continue sur le même domaine. De plus :

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, x)\right| \leq Mxe^{-x(\alpha-\alpha_0)} \leq Mxe^{-x(a-\alpha_0)}$$

pour tout s tel que $\Re e(s) = \alpha > a > \Re e(s_0) = \alpha_0$. Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres affirment que L est de dérivable par rapport à α (cette dérivée partielle étant continue) pour tout s tel que $\Re e(s) \geq a$. Donc, puisque la notion de dérivabilité est une notion locale, $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ existe et est continue sur $\Pi(\sigma)$ et :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)}F(x)dx - (s-s_0)\int_0^{+\infty} xe^{-x(s-s_0)}F(x)dx$$

Soit $X > 0$,

$$\int_0^X e^{-x(s-s_0)}F(x)dx = \left[-\frac{e^{-x(s-s_0)}}{s-s_0}F(x)\right]_0^X + \frac{1}{s-s_0}\int_0^X e^{-xs}f(x)dx$$

En prenant la limite lorsque X tend vers l'infini, il vient, car $F(0) = 0$, $\Re e(s) > \Re e(s_0)$ et F majorée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)}F(x)dx = \frac{1}{s-s_0}\int_0^{+\infty} e^{-xs}f(x)dx$$

D'autre part, une primitive de $x \mapsto x(s-s_0)e^{-x(s-s_0)}$ sur $\mathbb{R}^+$ est $x \mapsto -\dfrac{x(s-s_0)+1}{s-s_0}e^{-x(s-s_0)}$. Donc :

$$\int_0^X x(s-s_0)e^{-x(s-s_0)}F(x)dx = \left[F(x)\left(-\frac{x(s-s_0)+1}{s-s_0}e^{-x(s-s_0)}\right)\right]_0^X + \int_0^X \frac{x(s-s_0)+1}{s-s_0}e^{-x(s-s_0)}e^{-xs_0}f(x)dx$$

Pour les mêmes raisons, en prenant la limite lorsque X tend vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} x(s-s_0)e^{-x(s-s_0)}F(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(s-s_0)+1}{s-s_0}e^{-xs}f(x)dx$$

La différence des deux expressions donne :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = -\int_0^{+\infty} xe^{-xs}f(x)dx$$

c) Soit $\alpha > \sigma(f)$. On vient de montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$\mathcal{L}(f)'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}xf(x)dx$$

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est un élément de $\mathcal{C}$. La même démonstration que celle de la question précédente où $f(x)$ a été remplacé par $xf(x)$ donnera que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ est de classe C^2 sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$\mathcal{L}(f)''(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}x^2f(x)dx$$

Une démonstration par récurrence donne que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}(f)^{(k)}(\alpha) = (-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}x^kf(x)dx$$

d) On sait que pour $\alpha > \sigma(f), \alpha_0 > \sigma(f)$:

$$\mathcal{L}(f)(\alpha) = (\alpha-\alpha_0)\int_0^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx$$

où F continue, majorée sur $\mathbb{R}^+$ par M et $F(0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de F, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq x < \eta \Rightarrow |F(x)| < \varepsilon/2$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx = \int_0^{\eta} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx + \int_\eta^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx$$

Or :

$$\left|\int_0^{\eta} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1-e^{-\eta(\alpha-\alpha_0)}}{\alpha-\alpha_0}\right)$$

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x(\alpha-\alpha_0)}F(x)dx\right| \leq M\frac{e^{-\eta(\alpha-\alpha_0)}}{\alpha-\alpha_0}$$

Ainsi :

$$|\mathcal{L}(f)(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + Me^{-\eta(\alpha-\alpha_0)}$$

Or pour cet η fixé, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\eta(\alpha-\alpha_0)} = 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que $\alpha > A \Rightarrow Me^{-\eta(\alpha-\alpha_0)} < \varepsilon/2$. Finalement, pour $0 > A$, il vient $|\mathcal{L}(f)(\alpha)| < \varepsilon$

II. Comportement asymptotique d'une transformée de Laplace

1. Cas où $\mathcal{L}(f)(0)$ est défini

On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

a) Dans ce cas $\mathcal{L}(f)(0)$ existe. Par définition de $\sigma(f)$, on a $\sigma(f) \leq 0$.

b) En utilisant la question I2.a, avec $\alpha_0 = 0$, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}F(x)dx$$

où $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ vérifie $F(0) = 0$, F continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Notons $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Comme $\alpha \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}dx = 1$, on peut écrire :

$$\mathcal{L}(f)(\alpha) - \lambda = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}(F(x)-\lambda)dx$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow |F(x) - \lambda| < \varepsilon/2$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(\alpha) - \lambda| &\leq \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}|F(x)-\lambda|dx \\
&\leq \alpha \int_0^{A} e^{-x\alpha}|F(x)-\lambda|dx + \alpha\int_A^{+\infty} e^{-x\alpha}|F(x)-\lambda|dx \\
&\leq \alpha \int_0^{A} |F(x)-\lambda|dx + \frac{\varepsilon}{2}\alpha\int_A^{+\infty} e^{-x\alpha}dx \leq \alpha C_A + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Lorsque α tend vers 0^+, il existe $\delta > 0$ tel que $0 \leq \alpha < \delta \Rightarrow \alpha C_A < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi si $0 \leq \alpha < \delta$ alors $|\mathcal{L}(f)(\alpha) - \lambda| < \varepsilon$.

2. Un contre–exemple

Dans cette question $f(t) = \sin t$.

a) On a $f(t) = \Im m\ e^{it}$. Donc, par la question I.3 ($\lambda = i$), il vient :

$$\sigma(f) = 1 \quad \text{et } \mathcal{L}(f)(s) = \Im m\left(\frac{1}{s-i}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

b) Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to0^+} \mathcal{L}(f)(s) = 1$ sans que $\int_0^{+\infty} \sin(t))dt$ existe.

3. Cas d'une application$f$ positive

On sait que $\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}f(t)dt = \lambda$, avec $f(t) \geq 0$. Soit (α_n) une suite décroissante vers 0. La suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$ $\left(t \mapsto e^{-\alpha_n t}f(t)\right)_n$ converge simplement en décroissant vers $t \mapsto f(t)$. Le théorème de convergence monotone nous assure que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}f(t)dt = \lambda$.

4. Un exemple de théorème taubérien

On suppose dans cette question que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

a) Il existe $A > 0$ tel que si $x > A$ alors $f(x) \leq \frac{1}{x}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha = \Re e(s) > 0$. Alors, pour $x > A$, $|e^{-xs}f(x)| \leq \frac{e^{-x\alpha}}{x}$ et $x \mapsto \frac{e^{-x\alpha}}{x}$ est une fonction intégrable sur $[A, +\infty[$ (car $\alpha > 0$). Ainsi $\sigma(f) \leq 0$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $X > 0$ tel que $x > X$ alors $|xf(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1}{A}\int_0^A |xf(x)|dx = \frac{1}{A}\int_0^X |xf(x)|dx + \frac{1}{A}\int_X^A |xf(x)|dx \leq \frac{1}{A}K_X + \frac{\varepsilon}{2}$$

Et il existe $B > 0$ tel que $A > B \Rightarrow \frac{1}{A}C_X < \frac{\varepsilon}{2}$.

c) On peut écrire :

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)e^{-x\alpha}dx\right| \leq \int_A^{+\infty} |xf(x)|\frac{e^{-x\alpha}}{x}dx \leq \sup_{t\geq A}|tf(t)|\int_A^{+\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{x}dx = \sup_{t\geq A}|tf(t)|\frac{e^{-A\alpha}}{A\alpha}$$

d) On suppose de plus que $\lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{L}(f)(\alpha) = \mu$. Alors, pour $A > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx - \int_0^A f(x)dx\right| &\leq \int_0^A (1-e^{-\alpha x})|f(x)|dx + \int_A^{+\infty}|f(x)|e^{-\alpha x}dx \\ &\leq \alpha\int_0^A x|f(x)|dx + \int_A^{+\infty}|f(x)|e^{-\alpha x}dx \\ &\leq \alpha\int_0^A x|f(x)|dx + \sup_{t\geq A}|tf(t)|\frac{e^{-A\alpha}}{A\alpha}\end{aligned}$$

Choisissons $\alpha = \frac{1}{A}$. Alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \frac{1}{A}\int_0^A x|f(x)|dx + \sup_{t\geq A}|tf(t)|e^{-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Par l'hypothèse de la question et le b., il existe $A > 0$ tel que :

$$\frac{1}{A}\int_0^A x|f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{t\geq A}|tf(t)|e^{-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x/A}dx - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

Finalement, comme $\lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{L}(f)(\alpha) = \mu$, $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = \mu$.

justification de $1 - e^{-u} \leq u$ pour $u \geq 0$: le reste d'une série qui vérifie le critère des séries alternées est du signe de son premier terme.

III. Le théorème taubérien d'Ikehara

A. Préliminaires

A1. Calcul d'une intégrale

a) La fonction $x \mapsto \Delta(x)$ est prolongeable par continuité en 0 par $1/\pi$. De plus, pour $x \geq 1, 0 \leq \Delta(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$. Cela entraîne que $\mathcal{L}(\Delta)(0)$ existe, donc que $\sigma(\Delta) \leq 0$.

b) La question I.4.c donne pour tout $\alpha > 0$ que $(\mathcal{L}(\Delta))''(\alpha)$ existe et que :

$$(\mathcal{L}(\Delta))''(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin^2(t)dt = \frac{2}{\pi\alpha(\alpha^2+4)}$$

(Les calculatrices formelles étant permises, celles–ci calculent cette intégrale)
Et, avec la même remarque :

$$(\mathcal{L}(\Delta))'(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+4}}\right) + C$$

et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}\sin^2 t}{t}dt = 0$ (I.4.d) entraîne que $C = 0$. Donc, avec la même remarque :

$$\mathcal{L}(\Delta)(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\ln\alpha^2 - \alpha\ln(\alpha^2+4) - 4\operatorname{Arctan}(\alpha/2) + C\right)$$

En prenant la limite lorsque α tend vers l'infini, il vient $C = 2\pi$, puisque $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\mathcal{L}(\Delta)(\alpha) = 0$. Finalement :

$$\mathcal{L}(\Delta)(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\ln\alpha^2 - \alpha\ln(\alpha^2+4) - 4\operatorname{Arctan}(\alpha/2) + 2\pi\right)$$

c) $\alpha \mapsto \mathcal{L}(\Delta)(\alpha)$ définie ci-dessus est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions continues et on vérifie immédiatement que $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{L}(\Delta)(\alpha) = 1/2$. Donc, par II.1 et la parité de Δ :

$$\int_0^{+\infty}\Delta(x)dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\mathcal{L}(\Delta)(\alpha) = 1/2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x)dx = 1$$

A2. Calcul d'une (autre) intégrale

Soit H définie sur $[-2\lambda, 2\lambda]$ par :

$$H(\beta) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{|\beta|}{2\lambda}\right)e^{i\eta\beta}$$

On a :

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)e^{-i\beta x}d\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{i(\eta-x)\beta}b\beta + \frac{\beta}{2\pi\lambda}\int_{-2\lambda}^{0} e^{i(\eta-x)\beta}d\beta - \frac{\beta}{2\pi\lambda}\int_0^{2\lambda} e^{i(\eta-x)\beta}d\beta$$

et un calcul (quasiment) immédiat donne :

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta)e^{-i\beta x}d\beta = 2\lambda\Delta(\lambda(\eta - x))$$

A.3 Le lemme de Riemann-Lebesgue

La démonstration se trouve dans tout livre de mathématiques au chapitre «Séries de Fourier». Dans le cas général :

- si f est de la forme $1_{[\alpha,\beta]}$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\gamma t}dt\right| = \left|\frac{1}{i\gamma}\left(e^{i\gamma\beta} - e^{i\gamma\alpha}\right)\right| \leq \frac{2}{\gamma}$$

qui tend vers 0 lorsque γ tend vers l'infini.

- ce résulat reste vrai pour les fonctions en escalier sur $[a,b]$ par linéarité de l'intégrale.
- puis on le démontre pour toute fonction continue sur $[a,b]$ en utilisant la densité des fonctions en escalier dans $(C^0([a,b]), || \, ||_\infty)$.

B. Le théorème

B1. Continuité de r

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}|r(\beta+h)-r(\beta)| &\leq |\delta(\alpha+i(\beta+h))-r(\beta+h)|+|\delta(\alpha+i\beta-r(\beta)| \\ &\quad +|\delta(\alpha+i(\beta+h))-\delta(\alpha+i\beta)| \\ &\leq \sup_{|\beta|\leq\lambda}|\delta(\alpha+i(\beta+h))-r(\beta+h)|+\sup_{|\beta|\leq\lambda}|\delta(\alpha+i\beta-r(\beta)| \\ &\quad +|\delta(\alpha+i(\beta+h))-\delta(\alpha+i\beta)|\end{aligned}$$

En choisissant λ de façon à ce que $|\beta+h|, |\beta| \leq \lambda$, par l'hypothèse $\mathcal{P}$, il vient, en fixant $\varepsilon > 0$:

$$\exists\ \eta_1 \mid |\alpha| < \eta_1 \Rightarrow \sup_{|\beta+h|\leq\lambda}|\delta(\alpha+i(\beta+h))-r(\beta+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\exists\ \eta_2 \mid |\alpha| < \eta_2 \Rightarrow \sup_{|\beta|\leq\lambda}|\delta(\alpha+i\beta-r(\beta)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

L'application δ étant continue sur $\Pi(0)$, il existe η_3 tel que $|h| < \eta_3 \Rightarrow |\delta(\alpha+i(\beta+h)-\delta(\alpha+i\beta)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Il reste à prendre le $|h| < \eta_3$ pour terminer.

B2. Une égalité d'intégrales

a) Soit $\alpha > 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)\delta(\alpha+i\beta)d\beta-\int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)r(\beta)d\beta\right| &\leq \int_{-2\lambda}^{2\lambda}|H(\beta)||\delta(\alpha+i\beta)-r(\beta)|d\beta \\ &\leq \sup_{|\beta|\leq 2\lambda}|\delta(\alpha+i(\beta)-r(\beta)|\int_{-2\lambda}^{2\lambda}|H(\beta)|d\beta \\ &\leq K_\lambda \sup_{|\beta|\leq 2\lambda}|\delta(\alpha+i(\beta)-r(\beta)|\end{aligned}$$

On termine en utilisant l'hypothèse $\mathcal{P}$.

b) On a :

$$\begin{aligned}K(\alpha) &= \int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)\delta(\alpha+i\beta)d\beta \\ &= \int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\alpha+i\beta+1)t}dtd\beta-\int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+i\beta)t}dtd\beta\end{aligned}$$

Soit $X > 0$ et $F(X,\beta) = \displaystyle\int_0^X f(t)e^{-(\alpha+1+i\beta)t}dt$. On a alors, par positivité de f :

$$|H(\beta)F(X,\beta)| \leq |H(\beta)|\left|\int_0^X f(t)e^{-(\alpha+1)t}dt\right| \leq |H(\beta)||\mathcal{L}(f)(\alpha+1)|$$

qui est une fonction intégrable sur $[-2\lambda, 2\lambda]$. Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}F(X,\beta) = \int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\alpha+1+i\beta)t}dt$, il vient, par la continuité des fonctions utilisées et le théorème de Fubini :

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda}H(\beta)\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\alpha+i\beta+1)t}dtd\beta = \int_0^{+\infty}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}f(t)e^{-(\alpha+i\beta+1)t}H(\beta)d\beta dt$$

Pour les mêmes raisons, on a :

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta) \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)t} dt d\beta = \int_0^{+\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} e^{-(\alpha+i\beta)t} H(\beta) d\beta dt$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} f(t) e^{-(\alpha+i\beta+1)t} = \int_0^{+\infty} 2\lambda\Delta(\lambda(\eta - x)) f(t) e^{-t} e^{-\alpha t} dt$$

et :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} f(t) e^{-(\alpha+i\beta+1)t} = \int_0^{+\infty} 2\lambda\Delta(\lambda(\eta - x)) e^{-\alpha t} dt$$

c) La justification est la question II.1

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \Delta(\lambda(\eta - x)) dx = \int_0^{+\infty} \Delta(\lambda(\eta - x)) dx$$

d) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$ existe. En effet, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto f(x) e^{-(\alpha+1)x}$ est intégable sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{\alpha \to 0^+} f(x) e^{-(\alpha+1)x} = f(x) e^{-x}$ en décroissant. La question II.3 permet de conclure.

Comme $\Delta(\lambda(\eta - x))$ reste bornée et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Delta(\lambda(\eta - x))(g(x) - 1) dx$ existe.

On a, par les question IIIB2a,b,c et unicité de la limite le résultat demandé, en remplaçant dans la question IIIB2c $e^{-\alpha x}\Delta(\lambda(\eta - x))$ par $e^{-\alpha x}\Delta(\lambda(\eta - x))(g(x) - 1)$:

$$\int_0^{+\infty} \Delta(\lambda(\eta - x))(g(x) - 1) dx = \int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta) r(\beta) d\beta$$

B3. Un calcul de limite

a) Le théorème de Riemann-Lebesgue assure, par continuité de la fonction r, que :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} H(\beta) r(\beta) d\beta = 0$$

b) Donc :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} 2\lambda\Delta(\lambda(\eta - x)) g(x) dx - \int_0^{+\infty} 2\lambda\Delta(\lambda(\eta - x)) dx \right) = 0$$

Le changement de variable affine $u = \lambda(\eta - x)$ donne :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \left(\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du - \int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) du \right) = 0$$

On conclut par la question IIIA1c.

B4. Une majoration de $g(x)$

a) Lorsque $-\sqrt{\lambda} \leq u \leq \sqrt{\lambda}$, on a $\eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq \eta - \frac{u}{\lambda} \leq \eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, et la fonction f étant croissante :

$$g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) = f\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) e^{-(\eta - u/\lambda)} \geq f\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-\eta} e^{u/\lambda} = g\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-1/\sqrt{\lambda}} e^{u/\lambda}$$

Donc :

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-1/\sqrt{\lambda}} e^{u/\lambda} du$$

b) Comme $\eta \geq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, on a $\eta\lambda \geq \sqrt{\lambda}$ et par positivité :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du &\geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) e^{-1/\sqrt{\lambda}} e^{u/\lambda} du \\ &\geq g\left(\eta - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \Delta(u) du\end{aligned}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Delta(u)du = 1$, il existe $\lambda > 0$ tel $\displaystyle\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du \geq 1 - \varepsilon$.
Par la question IIIB.3.b, pour ce λ, il existe $A_1 > 0$ tel que $\eta > A$ entraîne que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \leq 1 + \varepsilon$.
Enfin $e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \leq 1$. Donc pour $\eta > A_1$:

$$g\left(\eta - \frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Il reste à prendre $A = A_1 + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

B5. Une minoration de $g(x)$

a) On sait que g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on vient de voir que g est majorée sur $[A, +\infty[$. Elle est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante M.

b) On recommence le même raisonnement :

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq -\frac{u}{\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \eta - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq \eta - \frac{u}{\lambda} \leq \eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

et

$$g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) \leq g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{u/\lambda + 1/\sqrt{\lambda}}$$

Donc :

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \leq g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) du$$

et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du &= \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du + \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \\ &\leq M \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du + g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du + M \int_{\sqrt{\lambda}}^{\eta\lambda} \Delta(u)du \\ &\leq M \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du + g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du + M \int_{\sqrt{\lambda}}^{+\infty} \Delta(u)du\end{aligned}$$

Soit $0 < \varepsilon' < 4$ donné et $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{4 - \varepsilon'}$. Comme $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du = 1$, il existe $\Lambda_1 > 0$ tel que $\lambda > \Lambda_1$ entraîne que $\displaystyle e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du < 1 + \varepsilon$.

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Delta(u)du = 1$, il existe $\Lambda_2 > 0$ tel que $\lambda > \Lambda_2$ implique que :

$$M \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \Delta(u)du < \varepsilon \quad \text{et} \quad M \int_{\sqrt{\lambda}}^{+\infty} \Delta(u)du < \varepsilon$$

Ainsi si $\lambda > \max(\Lambda_1, \Lambda_2)$:

$$\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \leq g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)(1+\varepsilon) + 2\varepsilon$$

Par la question IIIB3b, λ étant maintenant fixé, il existe $X > 0$ tel que $\eta + 1/\sqrt{\lambda} > X$ entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{\eta\lambda} \Delta(u) g\left(\eta - \frac{u}{\lambda}\right) du \geq 1 - \varepsilon$$

Donc :

$$g\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \geq \frac{1-3\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon'$$

B6. Conclusion

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Les questions III.B.4 et III.B.5 montrent qu'il existe $A > 0$ tel que si $x > A$, alors :

$$1 - \varepsilon \leq g(x) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ ou que $f(x)$ est équivalent à e^x au voisinage de l'infini.