Agrégation Interne de Mathématiques, 2001
Deuxième épreuve
Corrigé

L'objet du problème est l'étude des classes des fonctions réelles quasi-analytiques et la démonstration d'une (importante) partie du théorème de Carleman-Denjoy caractérisant de telles classes. On pourra se reporter à l'ouvrage « Analyse réelle et complexe » de W. Rudin, pour compléter la démonstration proposée dans ce problème.

Partie I.

1. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = C$, comme $A_0 = 1$, il vient $C = 1$. Réciproquement $C = 1$ convient.
On a facilement $(n+1)!(n-1)! = (n!)^2 \left(\dfrac{n+1}{n}\right) > (n!)^2$.

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \geq 1$. Les suite (λ_n) et (μ_n) sont donc bien définies.
a) On a :

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} \leq \frac{A_{n-1}}{A_n} \Leftrightarrow (A_n)^2 \leq A_{n+1}A_{n-1}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$: $\lambda_1 \geq \lambda_n, \lambda_2 \geq \lambda_n, \ldots, \lambda_n \geq \lambda_n$. On fait le produit de ces inégalités positives pour obtenir :

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \geq (\lambda_n)^n$$

b) En remplaçant λ_k par sa valeur, et par télescopage, le produit ci-dessus se réécrit :

$$\frac{1}{A_n} \geq \frac{A_{n-1}^n}{A_n^n} \Leftrightarrow A_n^{n-1} \geq A_{n-1}^n \Leftrightarrow \mu_n \leq \mu_{n-1}$$

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq j \leq n$:

$$\frac{A_{n+1}}{A_{n+1-j}} \geq \frac{A_n}{A_{n-j}} \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} \leq \frac{A_{n-j}}{A_{n+1-j}} \Leftrightarrow \lambda_{n+1} \leq \lambda_{n+1-j}$$

ce qui est vérifié par décroissance de la suite (λ_n).
Il faut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a :

$$\frac{A_{n-j}}{A_n} \leq \frac{A_0}{A_j}$$

ce qui se réécrit :

$$\frac{A_{n-j}}{A_{n-j+1}} \cdot \frac{A_{n-j+1}}{A_{n-j+2}} \cdots \frac{A_{n-1}}{A_n} \leq \frac{A_0}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdots \frac{A_{j-1}}{A_j}$$

Cela revient à démontrer que :

$$\lambda_{n-j+1}\lambda_{n-j+2} \cdots \lambda_n \leq \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_j$$

On a j termes dans chacun de ces produits. Il reste à utiliser la décroissance de la suite (λ_n).
d) Il suffit d'écrire :

$$(\lambda_n)^n \leq \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = \frac{1}{A_n}$$

Donc $0 < \lambda_n \leq \mu_n$. La convergence de la série $\sum \lambda_n$ s'en déduit par les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

3. a) Par la remarque et la positivité des éléments utilisés :

$$\frac{u_n}{b_n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

b) On sait que pour tout $p \geq 1$:

$$u_p \leq \frac{b_p}{p} \sum_{k=1}^{p} a_k c_k$$

On somme, puis on intervertit les deux sommes et on utilise la positivité des b_p :

$$\sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p} \sum_{k=1}^{p} a_k c_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=k}^{n} \frac{b_p}{p} \right) a_k c_k \leq \sum_{k=1}^{n} B_k a_k c_k$$

c) Pour $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, un calcul immédiat donne $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, ce qui permet d'affirmer que la série $\sum \dfrac{b_n}{n}$ converge. De plus, pour tout $k \geq 1$:

$$B_k = \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{k}$$

La question précédente permet d'écrire :

$$\sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{(k+1)^n}{k^{k-1}} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k a_k \leq e \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La série à terme positifs $\sum a_k$ étant convergente, on obtient que la série à termes positifs $\sum u_k$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

4. Il reste à démontrer que si la série $\sum \lambda_n$ converge, alors la série $\sum \mu_n$ converge. Or, par télescopage :

$$\mu_n = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n)^{1/n}$$

On a $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum \lambda_n$ est convergente. Donc par la question précédente, la série $\sum \mu_n$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$$

Partie II.

1. Soit f une fonction analytique dans Ω. Cela signifie que f est développable en série entière au voisinage de tout point $x_0 \in \Omega$. Donc pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

a) Supposons $x_0 \in Z(f)$. Alors pour tout $n \geq 0, f^{(n)}(x_0) = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$: $f(x) = 0$. La fonction f est identiquement nulle sur ce voisinage, ce qui entraîne que pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}, x \in Z(f)$. Ainsi $Z(f)$ est un ouvert de Ω.

b) Soit $(x_k)_k \in Z(f)$ tels que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Par continuité, pour tout $n \geq 0$:

$$\lim_{k \to +\infty} f^{(n)}(x_k) = f^{(n)}(x)$$

et donc, pour tout $n \geq 0$: $f^{(n)}(x) = 0$; ce qui signifie que $Z(f)$ est fermé dans Ω.

c) Si l'on suppose que $Z(f)$ n'est pas vide, c'est un fermé et un ouvert d'un intervalle (qui est connexe) : c'est une contradiction. Ainsi si f n'est pas identiquement nulle, alors $Z(f)$ est vide.

2. Soit $x_0 \in \Omega$. Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégral sur $[x_0, x]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

Et :

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt \right| \leq \frac{MK^n n!}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} |t-x|^{n-1} dt \leq MK^n |x-x_0|^n$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour tout x tel que $|K(x-x_0)| < 1$. Ainsi f est développable en série entière dans un voisinage de x_0, ceci pour tout $x_0 \in \Omega$, ce qui signifie que f est analytique dans Ω.

Partie III.

1. Si $A_n = n!$, par la question II.2, f est analytique dans Ω et par la question II.1, $C(A)$ est une classe quasi-analytique.

2. Supposons qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ telles que pour tout x réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \alpha \beta^n A_n, \quad |g^{(n)}(x)| \leq \gamma \delta^n A_n$$

Alors :

$$|(f+g)^{(n)}(x)| \leq (\alpha + \gamma) \max(\beta^n, \delta^n) A_n$$

et, par la question I.2.c :

$$|(fg)^{(n)}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right| \leq \alpha\gamma \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta^k \delta^{n-k} A_k A_{n-k} \right)$$
$$\leq \alpha\gamma \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta^k \delta^{n-k} \right) A_n = \alpha\gamma(\beta+\delta)^n A_n$$

3. Si $g(x) = f(ax+b)$ un récurrence immédiate donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

et pour tout x réel, pour tout n entier naturel :

$$|g^{(n)}(x)| \leq \alpha(|a|\beta)^n A_n$$

4. Soit $C(A)$ une classe quasi analytique et $f \in C(A)$ à suport compact. Ce support étant un borné de $\mathbb{R}$, il n'est pas égal à $\mathbb{R}$ et donc $Z(f)$ est non vide. Ceci entraîne que f est identiquement nulle

5. Soit $C(A)$ une classe non quasi analytique.
a) Il existe $g \in C(A)$ non identiquement nulle et telle que $Z(g) \neq \emptyset$. C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g^{(n)}(x_0) = 0$ et $x_1 \neq x_0$ tel que $g(x_1) \neq 0$.
En posant $f(x) = g(x + x_0)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$ et $a \neq 0$ tel que $f(a) \neq 0$. De plus par la question 3, $f \in C(A)$

b) On peut supposer $a > 0$ car si $a < 0$, on utilise $h(x) = f(-x)$ en lieu de f. Toujours par la question 3, $h \in C(A)$.

c) Comme $f, g \in C(A)$, les questions 2 et 3 donnent que $h \in C(A)$. De plus h n'est pas identiquement nulle (car $f(a) \neq 0$) et h est à support compact, puisque $\text{supp}(h) \subseteq [0, 2a]$.

6. Les deux question précédentes permettent d'affirmer que $C(A)$ n'est pas une classe quasi analytique si et seulement si $C(A)$ contient une fonction f non identiquement nulle, à support compact.

Partie IV.

1. Il suffit d'utiliser la règle de d'Alembert pour montrer que la série entière admet un rayon de convergence $R = +\infty$.

2. La fonction q est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque, par la question précédente, pour tout x réel : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{A_n} = 0$. De plus le sup est un max. Si $0 < y \le x$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{y^n}{A_n} \le \frac{x^n}{A_n} \Rightarrow \sup_n \left(\frac{y^n}{A_n}\right) \le \sup_n \left(\frac{x^n}{A_n}\right)$$

Pour $n = 0$, il vient $q(x) \ge 1$ et par positivité des termes de la série définissant q, pour tout réel $x : q(x) \le Q(x)$.

3. L'inégalité des accroissements finis et la positivité donnent, pour $0 \le x < y$:

$$0 < \frac{y^n}{A_n} - \frac{x^n}{A_n} \le (y-x) \sup_{t\in[x,y]} \left(\frac{nt^{n-1}}{A_n}\right) = (y-x)\left(\frac{ny^{n-1}}{A_n}\right) \le (y-x)Q'(y)$$

On écrit alors pour $0 \le x < y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{y^n}{A_n} \le (y-x)Q'(y) + \frac{x^n}{A_n} \le (y-x)Q'(y) + q(x)$$

Il reste à prendre le sup en n pour obtenir, pour $0 \le x < y$:

$$q(y) \le (y-x)Q'(y) + q(x)$$

ou, pour $0 \le x < y$: $0 \le q(y) - q(x) \le (y-x)Q'(y)$.
La continuité de q en tout point $y \in \mathbb{R}$ est alors immédiate.

4. On sait que pour tout réel x, $1 \le q(x) \le Q(x)$. Ceci permet d'affirmer que les fonctions $x \mapsto \frac{\ln q(x)}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{\ln Q(x)}{1+x^2}$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}^+$. On a également, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \frac{\ln q(x)}{1+x^2} \le \frac{\ln Q(x)}{1+x^2}$$

ce qui donne que (1) $\Rightarrow$ (2).

5. Par définition de $q(x)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $q(x) \ge \frac{x^n}{A_n}$. Donc, si $x \ge \frac{e}{\mu_n}$:

$$\ln q(x) \ge n\ln(x) - \ln(A_n) \ge n(1 - \ln(\mu_n) + \ln(\mu_n)) = n$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{e/\mu_n}^{e/\mu_{n+1}} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx \ge \sum_{n=1}^{N} n \int_{e/\mu_n}^{e/\mu_{n+1}} \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{e}\left[\mu_n - \mu_{n+1}\right]$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N} n\left[\mu_n - \mu_{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{N} (n\mu_n - (n+1)\mu_{n+1}) + \sum_{n=1}^{N+1} \mu_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n - (N+1)\mu_{N+1}$$

Et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \mu_n &\le e\sum_{n=1}^{N} \int_{e/\mu_n}^{e/\mu_{n+1}} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx + (N+1)\mu_{N+1} \\ &= e\int_{e/\mu_1}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx - e\int_{e/\mu_{N+1}}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx + (N+1)\mu_{N+1} \\ &\le e\int_{e/\mu_1}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx\end{aligned}$$

car, par le même raisonnement que précédemment :

$$e\int_{e/\mu_{N+1}}^{+\infty}\frac{\ln q(x)}{x^2}dx-(N+1)\mu_{N+1}\geq 0$$

Or si (2) est vérifié, l'intégrale $\displaystyle\int_{e/\mu_1}^{+\infty}\frac{\ln q(x)}{x^2}dx$ converge. Donc par le théorème de convergence des séries à termes positifs, (3) est vérifié.

6. On sait que (3) $\Rightarrow$ (4) par la question I.2.

7. a) Par exemple :

$$g_0 : x\mapsto\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

b) g_n étant une intégrale indéfinie de g_{n-1}, un récurrence immédate (g_0 est continue) montre que si g_{n-1} est de classe C^{n-1}, alors g_n est de classe C^n.

On sait que $\text{supp}(g_0)=[-1,1]=[-\lambda_0,\lambda_0]$. Comme, pour tout x réel :

$$g_1(x)=\frac{1}{2\lambda_1}\int_{\lambda_1}^{\lambda_1}g_0(t+x)dt$$

$g_0(t+x)=0$ si $x+\lambda_1<-1$ ou $x-\lambda_1>1$, soit si $x<-1-\lambda_1$ ou $x>1+\lambda_1$. Ainsi

$$\text{supp}(g_1)\subseteq[-\lambda_0-\lambda_1,\lambda_0+\lambda_1]$$

Supposons que $\text{supp}(g_{n-1})\subseteq[-\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i,\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i]=[-\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}]$. Alors, comme, pour tout x réel :

$$g_n(x)=\frac{1}{2\lambda_n}\int_{\lambda_n}^{\lambda_n}g_{n-1}(t+x)dt$$

$g_{n-1}(t+x)=0$ si $x+\lambda_n<-\alpha_{n-1}$ ou $x-\lambda_n>\alpha_{n-1}$, soit si $x<-\alpha_{n-1}-\lambda_n$ ou $x>\alpha_{n-1}+\lambda_n$. Ainsi :

$$\text{supp}(g_n)\subseteq[-\alpha_n,\alpha_n]$$

c) i) Les fonctions manipulées étant toutes continues, on peut utiliser le théorème de Fubini. Soit :

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}g_n(x)dx&=\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}\frac{1}{2\lambda_n}\left(\int_{x-\lambda_n}^{x+\lambda_n}g_{n-1}(t)dt\right)dx\\&=\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}\frac{1}{2\lambda_n}\left(\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}g_{n-1}(t+x)dt\right)dx\\&=\frac{1}{2\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}g_{n-1}(t+x)dxdt\\&=\frac{1}{2\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}\int_{t-\alpha_n}^{t+\alpha_n}g_{n-1}(u)dudt\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau Fubini, comme on a :

$$\begin{cases}t-\alpha_n\leq u\leq t+\alpha_n\\ -\lambda_n\leq t\leq\lambda_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda_n+\alpha_n\leq u\leq\lambda_n-\alpha_n\\ -\lambda_n\leq t\leq\lambda_n\end{cases}$$

il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}g_n(x)dx&=\frac{1}{2\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}\int_{t-\alpha_n}^{t+\alpha_n}g_{n-1}(u)dudt\\&=\frac{1}{2\lambda_n}\int_{\lambda_n-\alpha_n}^{-\lambda_n+\alpha_n}\left(\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}1dt\right)g_{n-1}(u)du\\&=\int_{-\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}g_{n-1}(u)du\end{aligned}$$

ii) Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} g_n(u)du = \int_{-\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} g_{n-1}(u)du = \int_{-1}^{1} g_0(u)du$$

On obtient les égalités demandées en se souvenant que pour tout n, $\mathrm{supp}(g_n) \subseteq [-\alpha_n, \alpha_n] \subset [-\alpha, \alpha]$.

d) On sait que $A_0 = 1$. Donc $N_\infty(g_0) \leq MA_0$. Supposons que $N_\infty(g_{n-1}) \leq MA_0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} |g_{n-1}(t+x)|dt \leq MA_0 \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} dt = MA_0$$

On sait de plus que pour tout x réel :

$$g_1'(x) = \frac{1}{2\lambda_1}(g_0(x+\lambda_1) - g_0(x-\lambda_1))$$

avec $\lambda_1 = \dfrac{1}{A_1}$. Donc :

$$N_\infty(g_1') \leq \frac{2M}{2\lambda_1} = MA_1$$

Supposons que $N_\infty(g_{n-1}') \leq MA_1$. Alors, comme on peut dériver sous le signe intégrale, puisque g_{n-1} est de classe C^{n-1} et qu'on intègre sur un compact, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n'(x) = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} g_{n-1}'(t+x)dt$$

et :

$$N_\infty(g_n') \leq \frac{MA_1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} dt = MA_1$$

e) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x, t+x]$, il vient, pour tout x réel et $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_{n-1}(x)| &= \left| \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} (g_{n-1}(t+x) - g_{n-1}(x))dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} \sup_{u \in [x, t+x]} |g_{n-1}'(u)||t|dt \\
&\leq MA_1 \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n} tdt \leq MA_1\lambda_n
\end{aligned}$$

On peut alors écrire $g_n - g_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (g_k - g_{k-1})$. On vient de montrer que la série $\sum(g_k - g_{k-1})$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (puisque la série $\sum \lambda_n$ converge), ce qui permet de dire que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g continue. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{supp}(g_n) \in [-\alpha, \alpha]$, il vient que $\mathrm{supp}(g) \in [-\alpha, \alpha]$.

f) i) On vient de montrer que la suite $(g_n - g_1)_n$ convergeait uniformément. La suite $(g_n - g_0)_n$ également (on y rajoute $g_1 - g_0$). Elle converge donc vers une fonction continue h et $g = h + g_0$.
Si g était identiquement nulle, on aurait alors $h + g_0 = 0$, donc $h(x) < 0$ pour $|x| \leq 1$ et $h(x) = 0$ pour $|x| > 1$. Mais par la question IV.7.c.ii) et la convergence uniforme :

$$0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} (g_n - g_0)(x)dx \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} \int_{-\alpha}^{\alpha} h(x)dx$$

ce qui entraîne que h est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ donc g_0 aussi.

ii) La relation demandée est vérifiée pour $k = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par une récurrence immédiate, il vient que g_k est de classe C^k et pour tout x réel :

$$g_k'(x) = \frac{1}{2\lambda_k} (g_{k-1}(x+\lambda_k) - g_{k-1}(x-\lambda_k))$$

$$g_k''(x) = \frac{1}{2\lambda_k} \cdot \frac{1}{2\lambda_{k-1}} \Big(g_{k-2}(x + \lambda_k + \lambda_{k-1}) \\ - g_{k-2}(x + \lambda_k - \lambda_{k-1}) - g_{k-2}(x - \lambda_k + \lambda_{k-1}) + g_{k-2}(x - \lambda_k - \lambda_{k-1}) \Big)$$

et par récurrence (à faire !), si l'on note $\epsilon_i = \pm 1$, $u_k = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \lambda_i$:

$$g_k^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k \prod_{i=1}^{k} \lambda_i} \left(\sum_{\{\epsilon_i\}} g_0(x + u_k) \right)$$

Cette dernière somme est la somme sur tous les choix de signes (ϵ_i) possibles et contient 2^k termes, ce qui entraîne que :

$$N_\infty(g_k^{(k)}) \leq \frac{2^k M}{2^k \prod_{i=1}^{k} \lambda_i} = M A_k$$

La relation demandée est vérifiée pour $n = k$. Soit $n > k$ et supposons la relation vérifiée pour $n - 1$. Comme g_n est de classe C^n, $g_n^{(k)}$ existe sur $\mathbb{R}$. En utilisant les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres sur le compact $[-\lambda_n, \lambda_n]$, il vient :

$$g_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} g_{n-1}^{(k)}(t + x) dt$$

Donc :

$$N_\infty(g_n^{(k)}) \leq \left(\frac{1}{2\lambda_n} \right) M A_k (2\lambda_n) = M A_k$$

iv) On sait que pour tout $n \geq k$: $N_\infty(g_n^{(k)}) \leq M A_k$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x, t + x]$, il vient, pour tout x réel et $n \geq k + 1$:

$$\begin{aligned} |g_n^{(k)}(x) - g_{n-1}^{(k)}(x)| &= \left| \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} (g_{n-1}^{(k)}(t + x) - g_{n-1}^{(k)}(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} \sup_{u \in [x, t+x]} |g_{n-1}^{(k+1)}(u)| |t| dt \\ &\leq M A_{k+1} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n} t dt \leq M A_{k+1} \lambda_n \end{aligned}$$

On fait ensuite le même raisonnement que dans la question IV.7.e.
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $(g_n^{(k)})_{n \geq k}$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que la fonction g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

v) On vient de trouver une fonction g non identiquement nulle, de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, à support compact vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par continuité de l'application N_∞, $N_\infty(g^{(k)}) \leq M A_k$. Ainsi $g \in C(A)$ et par la question III.6, $C(A)$ n'est pas une classe quasi analytique. On a donc montré que (4) $\Rightarrow$ (5).