Agrégation Interne 2004. Deuxième épreuve

CORRIGÉ

Partie I : Questions préliminaires. Exemples

A. Un lemme de Cantor

1. La suite $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ tend vers 0 pour tout x réel. En prenant $x = 2\pi$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \sin(nx) = 0$

2. a) Supposons que la suite (b_n) ne tende pas vers zéro. cela se traduit par

$$\exists\ \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N},\ \exists\ n_k \text{ tel que } |b_{n_k}| \geq \varepsilon$$

Quitte choisir n_k plus grand, on peut supposer que la sous-suite (n_k) vérifie $n_{k+1} \geq 3n_k$.

Avec les notations de la question, demander $J_{k+1} \subset J_k$ revient à demander

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}(\frac{\pi}{6} + p_k\pi) < \frac{\pi}{6} + p_{k+1}\pi < \frac{5\pi}{6} + p_{k+1}\pi < \frac{n_{k+1}}{n_k}(\frac{5\pi}{6} + p_{k+1}\pi)$$

ou

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}(\frac{1}{6} + p_k) < \frac{1}{6} + p_{k+1} < \frac{5}{6} + p_{k+1} < \frac{n_{k+1}}{n_k}(\frac{5}{6} + p_{k+1})$$

soit

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}p_k + \frac{1}{6}\left(\frac{n_k + 1 - n_k}{n_k}\right) < p_{k+1} < \frac{n_{k+1}}{n_k}p_k + \frac{5}{6}\left(\frac{n_k + 1 - n_k}{n_k}\right)$$

ou avec une notation évidente

$$u + \frac{1}{6}v < p_{k+1} < u + \frac{5}{6}v$$

On remarque que $v = \dfrac{n_k + 1 - n_k}{n_k} \geq 2$. Il suffit de prendre $p_{k+1} = \lfloor u + \frac{1}{6}v \rfloor$. On a immédiatement la première inégalité, et la seconde est vérifiée puisque

$$u + \frac{5}{6}v = u + \frac{1}{6}v + \frac{4}{6}v \geq u + \frac{1}{6}v + \frac{4}{3}$$

Par le théorème des segments emboîtés, $\bigcap\limits_{k\geq 1} J_k \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap\limits_{k\geq 1} J_k$. Il vient, comme $n_k x \in [a_k, b_k]$

$$|b_{n_k} \sin(n_k x)| \geq |b_{n_k}|\frac{1}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

en contradiction, avec la première question.

b) Un calcul immédiat donne

$$\int_0^\pi (b_n \sin(nx))^2 dx = \pi b_n^2$$

Si la suite (b_n) est bornée, la suite $(b_n \sin(nx))$ est également bornée et comme elle converge simplement vers 0, on a, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \pi b_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (b_n \sin(nx))^2 dx = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} (b_n \sin(nx))^2 dx = 0$$

La suite (b_n) tend donc vers 0.

Dans le cas général, on pose

$$b'_n = \inf(1, b_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |b_n| > 1 \\ b_n & \text{si } |b_n| \leq 1 \end{cases}$$

Cette suite est bornée et comme $|b'_n| \le |b_n|$, $\lim_{n\to+\infty} |b'_n \sin nx| = 0$. Donc par le résultat précédent, il vient $\lim_{n\to+\infty} b'_n = 0$. Ainsi il ne peut exister qu'un nombre fini d'indices n pour lesquels $|b_n| > 1$. Donc, la suite (b_n) est bornée, et on est revenu à la question précédente.

B. L'espace H

1. a) Comme, pour tout x réel

$$\left|\frac{a_n}{n}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

la série $\sum \left|\frac{a_n}{n}\sin(nx)\right|$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \to \frac{a_n}{n}\sin(nx)$ est continue sur $[0,\pi]$. Par convergence normale sur $\mathbb{R}$, $\theta(\alpha)$ est une fonction continue sur $[0,\pi]$, à valeurs réelles.

c) L'application θ est manifestement linéaire. Elle est injective par le théorème de Parseval. En effet, $\theta(\alpha)$ est continue sur $[0,\pi]$, 2π périodique et impaire. Par convergence normale, les coefficients de Fourier de $\theta(\alpha)$ sont, pour tout $n \ge 0$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n}$$

Donc, si pour tout x réel, $\theta(\alpha)(x) = 0$, il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\theta(\alpha)(x)|^2 dx = 0$$

Donc, pour tout $n \ge 1, \alpha_n = 0$.

Par définition $H = \theta(\ell^2_{\mathbb{R}})$, est isométrique à $\ell^2_{\mathbb{R}}$ qui est un espace de Hilbert. L'espace H est donc complet.

2. Soit $\widetilde{f}$ définie dans cette question. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f \in E$), C^1_m, 2π périodique et impaire. Ainsi, pour tout $n \ge 0, a_n(\widetilde{f}) = 0$ et pour tout $n \ge 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\widetilde{f}$ converge normalement vers $\widetilde{f}$. Donc la série $\sum_{n\ge 1} |b_n|$ converge et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Donc, pour tout $t \in [0,\pi]$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Notons $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = \pi$ les points de discontinuité de $\widetilde{f}$. Une intégration par parties donne

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{n\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\cos(nt)dt = \frac{\alpha_n}{n}$$

les scalaires α_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $\widetilde{f}'$ qui est C^0_m, paire et 2π périodique. Par le théorème de Parseval $\sum_{n\ge 1} |\alpha_n|^2$ converge.

3. L'application $(f,g) \to (f \mid g)$ est manifestement bilinéaire et symétrique. Elle est définie positive, puisque $(f \mid f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (f')^2(t)dt \ge 0$ et

$$0 = (f \mid f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (f')^2(t)dt \Rightarrow \forall\ t \in [0,\pi], f'(t) = 0$$

et comme $f \in E$, il vient $f = 0$.
La norme associée à ce produit scalaire coïncide avec la restriction à E de $||\cdot||_H$, par la question précédente (et donc le théorème de Parseval).

Enfin, E est dense dans $(H, ||\cdot||_H)$, car si $f = \theta(\alpha) \in H$, pour tout $t \in [0,\pi], f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \sin(nt)$, avec $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ série convergente.

Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{n} \sin(nt)$. Cette fonction est dans E ($C^\infty, f_N(0) = f_N(\pi) = 0$) et, lorsque N tend vers l'infini

$$||f - f_N||_H^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \longrightarrow 0$$

4. a) Soit $f \in H$. Utilisons l'inégalité de Cauchy–Schwarz ; pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{n}\right| |\sin(nt)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} ||f||_H = \frac{\pi}{\sqrt{6}} ||f||_H$$

b) Soit $f \in E$. Un calcul donne

$$(f \mid h_a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^a f'(t)dt - \frac{2}{\pi(\pi - a)} \int_a^\pi f'(t)dt = \frac{2f(a)}{a(\pi - a)}$$

Donc, pour tout $a \in]0,\pi[$

$$|f(a)| \leq \frac{a(\pi - a)}{2} |(f \mid h_a)| \leq \frac{a(\pi - a)}{2} ||h_a||_H ||f||_H$$

et

$$||h_a||_H^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_a'(t)^2 dt = \frac{2}{a(\pi - a)}$$

Donc

$$|f(a)| \leq \frac{a(\pi - a)}{2} \times \sqrt{\frac{2}{a(\pi - a)}} ||f||_H = \sqrt{\frac{a(\pi - a)}{2}} ||f||_H$$

Par continuité cette inégalité reste valable sur $[0,\pi]$. Enfin, pour tout $a \in [0,\pi]$

$$\sqrt{\frac{a(\pi - a)}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{8}}$$

Donc

$$||f||_\infty \leq \frac{\pi}{\sqrt{8}} ||f||_H$$

Par densité de E dans $(H, ||\cdot||_H)$, cette dernière inégalité reste valable pour $f \in H$.

5. a) Par continuité de la norme, $\lim_{n \to +\infty} ||f_n||_H = ||f||_H$. La suite $(||f_n||_H)$est donc bornée ; l'inégalité démontrée dans la question précédente montre que $(||f_n||_\infty)$ est bornée.

b) On développe le carré suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} ||g_p - g_q||_H^2 &= \int_0^\pi \left(f_p' F' \circ f_p - f_q' F' \circ f_q\right)^2 \\
&= \int_0^\pi \left((f_q' - f_p') F' \circ f_q + f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p)\right)^2 \\
&= \int_0^\pi [(f_q' - f_p') F' \circ f_q]^2 \\
&\quad + 2 \int_0^\pi (f_q' - f_p') F' \circ f_q \times f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p) \\
&\quad + \int_0^\pi [f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p)]^2
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^\pi [(f_q' - f_p')F' \circ f_q]^2 \leq M_1^2 ||f_p - f_q||_H^2$$

On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^\pi & (f_q' - f_p')F' \circ f_q \times f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p) \\ & \leq M_1 ||f_p - f_q||_H \left(\int_0^\pi [f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p)]^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Enfin, par le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [f_p'(F' \circ f_q - F' \circ f_p)]^2 &\leq \int_0^\pi |f_p'|^2 M_2^2 |f_p - f_q|^2 \\ &\leq M_2^2 ||f_p - f_q||_\infty^2 ||f_p||_H^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{8} M_2^2 ||f_p - f_q||_H^2 ||f_p||_H^2\end{aligned}$$

En regroupant ces trois inégalités, on obtient

$$||g_p - g_q||_H \leq \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} M_2 ||f_p||_H + M_1\right) ||f_p - f_q||_H$$

c) La suite (f_n) de E convergeant vers f dans H est de Cauchy. L'inégalité précédente montre que la suite (g_n) est de Cauchy et donc converge dans H. Les g_n sont éléments de E (par les hypothèses demandées sur F) et $\lim_{n\to\infty} g_n = F \circ f$. En effet

$$||g_n - g||_\infty \leq \frac{\pi}{\sqrt{8}} ||g_n - g||_H \longrightarrow 0$$

et par continuité de F, pour tout t, $\lim_{n\to+\infty} (F \circ f_n)(t) = (F \circ f)(t)$. On conclut par unicité de la limite.

d) L'espace de Hilbert H est une algèbre, car, pour tout $(f, g) \in H^2$

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

et par la question précédente, avec $F(x) = x^2$, on sait que $(f+g)^2$ et $(f-g)^2$ appartiennent à H.

Partie II. Pseudo–dérivée seconde au sens de Schwarz

1. Soit $g : t \to f(x+t) - f(x) - tf'(x) - \dfrac{t^2}{2} f''(x)$. La formule de Taylor–Young à l'ordre 2 pour f montre que $g(h) + g(-h) = o(h^2)$, lorsque h tend vers 0. On a donc, lorsque h tend vers 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

2. a) La fonction φ est continue comme somme de fonctions continues et on vérifie immédiatement que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Un calcul donne

$$\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) + 2h^2\varepsilon}{h^2}$$

Ainsi $\varphi^{('')}(x)$ existe et $\varphi^{('')}(x) = 2\varepsilon$.

Supposons que φ admette un maximum strictement positif en $x \in [a, b]$. Dans ce cas, pour tout h, $\dfrac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} < 0$, et à la limite lorsque h tend vers 0, $\varphi^{('')}(x) = 2\varepsilon \leq 0$: contradiction à $\varepsilon > 0$.

b) Aussi, pour tout $x \in [a,b], \varphi(x) \leq 0$, et, pour tout $\varepsilon > 0$

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon(x-a)(b-x)$$

En faisant rendre ε vers 0, il vient, pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq 0$$

Posons

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(b-x)$$

La fonction ψ est continue comme somme de fonctions continues et on vérifie immédiatement que $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Un calcul donne

$$\frac{\psi(x+h)+\psi(x-h)-2\psi(x)}{h^2} = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-2h^2\varepsilon}{h^2}$$

Ainsi $\psi^{('')}(x)$ existe et $\psi^{('')}(x) = -2\varepsilon$.

Supposons que ψ admette un minimum strictement négatif en $x \in [a,b]$. Dans ce cas, pour tout h, $\dfrac{\psi(x+h)+\psi(x-h)-2\psi(x)}{h^2} > 0$, et à la limite lorsque h tend vers 0, $\psi^{('')}(x) = -2\varepsilon \geq 0$: contradiction à $\varepsilon > 0$.

Aussi, pour tout $x \in [a,b], \psi(x) \geq 0$, et, pour tout $\varepsilon > 0$

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq \varepsilon(x-a)(b-x)$$

En faisant rendre ε vers 0, il vient, pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq 0$$

Finalement f est une fonction affine sur $[a,b]$.

3. a) La série $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ étant convergente, on sait que pour tout x réel, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0$. par le lemme de Cantor, on sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. les suites (a_n) et (b_n) sont donc bornées et pour tout x réel

$$\left|\frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

ce qui entraîne une convergence normale de la série $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ et donc l'existence et la continuité de F.

b) On utilise les relations entre lignes trigonométriques, pour montrer que

$$\Delta(x,h) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\frac{4}{n^2h^2}\sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)$$

c) Regardons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)(u(kh) - u((k+1)h)) &= \sum_{k=0}^{n} S_k(x)u(kh) - \sum_{k=1}^{n} S_k(x)u((k+1)h)\\ &= \sum_{k=1}^{n} S_k(x)u(kh) - \sum_{k=1}^{n+1} S_{k-1}(x)u(kh)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)u(kh) - S_n(x)u((n+1)h)\end{aligned}$$

Également

$$\sum_{k=0}^{n} f(x)(u(kh) - u((k+1)h)) = f(x)(1 - u((n+1)h))$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} (S_k(x) - f(x))(u(kh) - u((k+1)h)) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) u(kh) - f(x) - (S_n(x) - f(x)) u((n+1)h)$$

Or, lorsque n tend vers l'infini, pour tout x réel,

$$|u((n+1)h)| \leq \frac{4}{(n+1)^2 h^2} \to 0, \quad \text{et } |S_n(x) - f(x)| \to 0$$

d) i) On peut écrire

$$\Delta(x,h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n(x) - f(x)) \int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)dt$$

avec, pour $u'(0) = 0$ et pour $t \neq 0$ $u'(x) = \dfrac{2}{x^2}\left[-\dfrac{4}{x}\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin(x)\right]$.

$\star$ Pour tout n, pour tout x réel, $\displaystyle\lim_{h\to 0} (S_n(x) - f(x)) \int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)dt = 0$

$\star$ On remarque que $u' \in C_0(\mathbb{R}^+)$ et qu'au voisinage de ∞, $|u'(x)| \leq \dfrac{C}{x^2}$. La fonction u' est donc sommable sur $\mathbb{R}^+$.

$\star$ On sait que la suite (S_n) converge simplement vers f. Soit x fixé et $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 = N(x, \varepsilon)$, tel que pour tout $n \geq N_0, |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

En regroupant ces informations, il vient

$$\begin{aligned}
|R_{N_0}(x,h)| &\leq \sum_{n=N_0}^{\infty} |(S_n(x) - f(x))| \int_{nh}^{(n+1)h} |u'(t)|dt \\
&\leq \varepsilon \sum_{n=N_0}^{\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} |u'(t)|dt \leq \varepsilon \int_{N_0 h}^{\infty} |u'(t)|dt \\
&\leq \varepsilon \int_0^{\infty} |u'(t)|dt = C\varepsilon
\end{aligned}$$

La série $h \to \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (S_n(x) - f(x)) \int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)dt$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème de limite, il vient

$$\lim_{h\to 0} \Delta(x,h) - f(x) = 0$$

ii) Soit $\psi : x \to \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$. La fonction f étant continue, la fonction ψ est de classe C^2 et $\psi''(x) = f(x)$, pour tout x réel.

iii) Si l'on pose $g = F - \psi$, par les questions précédentes, on a $g^{('')}(x) = 0$ et donc g est une fonction affine, soit

$$F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x-t) f(t)dt$$

e) Si $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$, par convergence normale,

$$a_0(F) = 0, \forall n \geq 1, a_n(F) = -\frac{a_n}{n^2}, b_n(F) = -\frac{b_n}{n^2}$$

On sait que $F(x)=\alpha x+\beta+\psi(x)$. Or F est 2π périodique ; aussi

$$F(x)=F(x+2\pi)\Rightarrow \psi(x+2\pi)=\psi(x)-2\alpha\pi \Rightarrow \alpha=\psi(-\pi)-\psi(\pi) over 2\pi$$

et

$$\psi'(x+2\pi)=\psi'(x)$$

On sait également que la fonction ψ est de classe C^2 et que $\psi''=f$. Un calcul d'intégrale donne avec les relations précédentes

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt=-n^2 a_n(\psi)$$

$$b_n(f)=-n\frac{\psi(-\pi)-\psi(\pi)}{\pi}-n^2 b_n(f)$$

On trouve également

$$a_n(\beta)=b_n(\beta)=0, a_n(x)=0, b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin ntdt=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Enfin

$$-\frac{a_n}{n^2}=a_n(F)=\alpha a_n(x)+a_n(\beta)+a_n(\psi)=-\frac{a_n(f)}{n^2}$$

et

$$\begin{aligned}-\frac{b_n}{n^2}&=b_n(F)=\alpha b_n(x)+b_n(\beta)+b_n(\psi)\\&=(-1)^n\frac{\psi(-\pi)-\psi(\pi)}{n\pi}-\frac{b_n(f)}{n^2}-(-1)^n\frac{\psi(-\pi)-\psi(\pi)}{n\pi}\\&=-\frac{b_n(f)}{n^2}\end{aligned}$$

Partie III. Application à un problème variationnel

1. Le résultat de cette question correspond aux résultats de la partie précédente, avec $a_n=0$, (c'est pourquoi $\widetilde{f}$ est impaire....)

2. Il suffit de développer les deux expressions proposées pour obtenir le résultat demandé.

3. Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (P). L'égalité précédente, donne pour tout t réel, et par définition de u_1, u_2

$$J((1-t)u_1+tu_2)+\frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi}(u_1'-u_2')^2+(u_1-u_2)^2=J(u_1)$$

Comme $(1-t)u_1+tu_2\in E_0$, il vient, pour tout t réel

$$\frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi}(u_1'-u_2')^2+(u_1-u_2)^2=0$$

donc par continuité, pour tout t réel

$$\int_0^{\pi}(u_1'-u_2')^2+(u_1-u_2)^2=0$$

et $u_1=u_2$.

4. a) La encore, il suffit d'effectuer le calcul demandé.

b) La fonction u est solution du problème (P) si et seulement si pour tout t réel, pour tout $v\in E_0$, $J(u)\leq J(u+tv)$ (car tout $w\in E_0$ peut s'écrire sous la forme $u+tv$)

Cela se traduit par, pour tout t réel, pour tout $v \in E_0$

$$t \int_0^\pi (u'v' - uv - fv) + \frac{t^2}{2} \int_0^\pi (v'^2 + v^2) = 0$$

Et ceci est vérifié si et seulement si, pour tout $v \in E_0$

$$\int_0^\pi (u'(x)v'(x) - u(x)v(x) - f(x)v(x)) = 0$$

5. a) Par la question précédente, en prenant $v(x) = \sin(nx) \in E_0$, il vient

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \int_0^\pi (u(x) \sin nx dx - n \int_0^\pi u'(x) \cos nx dx$$

Une intégration par parties donne

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{b_n}{n^2+1}$$

b) La fonction $\widetilde{u}$ possède les propriétés suivantes

- $\widetilde{u}$ est 2π périodique et $\widetilde{u}() = \widetilde{u}(\pi) = 0$
- $\widetilde{u}$ est continue par convergence normale de la série la définissant (car $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.
- la décomposition de $\widetilde{u}$ sous sa seconde forme est valable puisque chaque série est normalement convergente.
- par les résultats de la partie II, $F(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n \sin nx}{n^2}$ vérifie $F(x) = \alpha x + \beta + \psi(x)$ et est donc de classe C^2, avec $F''(x) = f(x)$
- enfin, comme $\left(\dfrac{b_n}{n^2(n^2+1)} \sin nx \right)'' = -\left(\dfrac{b_n}{n^2+1} \sin nx \right)$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{b_n}{n^2(n^2+1)} \sin nx \right)$ est de classe C^2, de dérivée seconde égale à $-\widetilde{u}$.

On a donc $\widetilde{u}(x) = F(x) - G(x)$, avec $G''(x) = -\widetilde{u}$ et $F''(x) = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{u}(x) = f(x) + u(x)$$

c) La restriction de $\widetilde{u}$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est de classe C^2 et vérifie la même équation différentielle aux conditions limites que précédemment.

d) Soit $v \in E_0$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u'(x)v'(x)dx + \int_0^\pi u(x)v(x)dx &= \\ &\int_0^\pi (u(x) - u''(x))v(x)dx = \\ &\int_0^\pi f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Ainsi u est solution de (P') et donc de (P) qui lui est équivalent.