AGRÉGATION INTERNE

DE MATHÉMATIQUES

Session 2012, épreuve 2

– NOTATIONS ET RAPPELS –

- **R** désigne l'ensemble des nombres réels.
- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels.
- Pour tous entiers naturels p et q vérifiant $p \leq q$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \;/\; p \leq n \leq q\}$ est noté $[\![p, q]\!]$.
- Définition : on dit qu'une suite u est périodique à partir d'un certain rang si

$$\exists p \in \mathbf{N}^*,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N, \quad u_{n+p} = u_n\,.$$

- **Dans tout le problème** E désigne un espace vectoriel réel **de dimension finie** que l'on munit d'une norme notée $\|.\|$. Sauf contre-indication, les suites étudiées dans ce problème sont à valeurs dans E.
- Pour tout élément x de E et tout réel strictement positif r, $\mathcal{B}\,(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.
- Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans E.
- Si f est une application d'un ensemble A vers lui-même et si n est un entier strictement positif, on note f^n l'application

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}\,.$$

On pose par convention $f^0 = Id_A$.

Rappels

- Définition : soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit qu'une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une **suite extraite** de la suite u s'il existe une application strictement croissante ϕ de l'ensemble **N** vers lui-même vérifiant $v = u \circ \phi$, c'est-à-dire $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
- Définition : soit u une suite de E. Un élément ℓ de E est dit **valeur d'adhérence** de cette suite s'il est limite d'une suite extraite de la suite u.
- Définition équivalente : un élément ℓ de E est valeur d'adhérence d'une suite u si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geq N / \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon\,.$$

Notations

- On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite u.
- Pour toute suite u et pour tout entier naturel N, on note $T_N(u)$ l'ensemble des termes d'indice supérieur ou égal à N de la suite u, c'est-à-dire :

$$T_N(u) = \{x \in E \;/\; \exists n \in \mathbf{N},\, n \geq N,\, x = u_n\}\,.$$

On remarquera que $T_0(u)$ est l'ensemble image de la suite u.

– Partie I : Valeurs d'adhérence –

A) Premières propriétés de $V(u)$

On considère une suite u d'éléments de E.

1. Démontrer que
$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \overline{T_N(u)} = T_N(u) \cup V(u).$$

2. Démontrer que :
$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbf{N}} \overline{T_N(u)}$$

3. Vérifier que l'ensemble $V(u)$ est

(a) un fermé de E ;

(b) un compact non vide si la suite u est bornée.

4. **(a)** On considère une suite u bornée telle que $V(u)$ soit fini. On note $\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_k$ les valeurs d'adhérence de u. Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier n_0 vérifiant :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{B}(\ell_i, \varepsilon) .$$

(b) En déduire qu'une suite bornée u est convergente si et seulement si $V(u)$ est un singleton.

5. Soient u et v deux suites d'éléments de E. Démontrer qu'il existe une suite w vérifiant :
$$V(w) = V(u) \cup V(v) .$$

B) Exemples

On dit qu'une partie A de E est **discrète** s'il existe un réel r strictement positif vérifiant
$$\forall (a, a') \in A^2, \quad a \neq a' \Longrightarrow \|a - a'\| \geq r .$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est **discrète** si son ensemble image est une partie discrète de E.

6. Démontrer qu'une suite discrète convergente est stationnaire.

7. Démontrer que si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite discrète alors
$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbf{N}} T_N(u) .$$

8. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple d'entiers naturels (p, k) vérifiant :
$$n = 2^p + k \text{ avec } k < 2^p .$$

9. Écrire dans le langage de votre choix, mais en n'utilisant pas de fonction «puissance», un algorithme donnant à partir d'un entier naturel n non nul, l'unique couple d'entiers naturels (p, k).

10. On reprend la décomposition vue dans la question 8, et on pose $k = k_n$ ainsi que $p = p_n$. On définit sur $\mathbf{N}^*$ la suite réelle u par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = k_n .$$

(a) Détailler les valeurs de u_n pour n compris entre 1 et 20. On présentera les résultats dans un tableau.

(b) Donner l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u.

11. Toujours avec la décomposition vue dans la question 8, on définit sur $\mathbf{N}^*$ la suite v par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \frac{k_n}{2^{p_n}}\,.$$

On considère un réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$ et un entier naturel n.

(a) Démontrer que x est une valeur d'adhérence de la suite v.

(b) Déterminer alors $V(v)$.

C) Limite inférieure d'une suite réelle

Pour les questions 12 à 15, on considère une suite réelle bornée $u = (u_n)$.

12. Soit N un entier naturel. Justifier l'existence de

$$m_N = \inf T_N(u)\,.$$

13. **(a)** Démontrer que la suite $(m_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est convergente. Sa limite est appelée **limite inférieure** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et notée $\liminf\limits_{n\to+\infty}\ u_n$.

(b) Vérifier que

$$\inf u \leq \liminf_{n\to+\infty}\ u_n \leq \sup u.$$

14. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty}\ u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite u.

15. Dans cette question, on compare $\liminf\limits_{n\to+\infty}\ u_n$, $\inf V(u)$ et $\min V(u)$. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite u. Démontrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty}\ u_n \leq \ell$. Conclure.

16. On considère deux suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que, pour tout entier n, $u_n \leq v_n$. Démontrer que

$$\liminf_{n\to+\infty}\ u_n \leq \liminf_{n\to+\infty}\ v_n\,.$$

17. On considère deux suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comparer les nombres suivants

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n$$

et donner au moins un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'égalité n'ait pas lieu.

D) Suites à évolution lente

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E est à **évolution lente** si

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0\,.$$

18. Donner un exemple de suite bornée, à évolution lente mais non convergente.

Le but des questions qui suivent est de montrer que si une suite u est bornée et à évolution lente alors l'ensemble $V(u)$ est connexe.

Nous allons effectuer une preuve par l'absurde ; ***on suppose donc que $V(u)$ n'est pas connexe.***

19. Démontrer qu'il existe deux compacts non vides K_1 et K_2 vérifiant

$$\begin{cases} K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ K_1 \cup K_2 = V(u). \end{cases}$$

20. Démontrer que la distance entre K_1 et K_2 est strictement positive. Elle sera notée a.

21. On note
$$\Omega_1 = \left\{x \in E / d(x, K_1) < \frac{a}{3}\right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \left\{x \in E / d(x, K_2) < \frac{a}{3}\right\}.$$
On considère M un majorant de la suite $\|u\| = (\|u_n\|)$. Démontrer que
$$K = \overline{\mathcal{B}(0, M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$
est un compact.

22. Démontrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K et conclure à l'absurdité de l'hypothèse initiale.

– Partie II : Valeurs d'adhérence de suites itératives –

On considère une partie compacte K de E, une application continue f définie sur K, à valeurs dans K et enfin une suite récurrente u associée à f, c'est-à-dire définie par
$$\begin{cases} u_0 \in K, \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

23. Démontrer que $V(u)$ est invariant par f, c'est-à-dire que $f\left(V(u)\right) = V(u)$.

Pour les questions 24 à 27, le compact K est le segment $[0,1]$, la fonction f est définie par
$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 1 - |2x - 1| \end{array} \quad \textit{c'est-à-dire } f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \textit{si} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
et u est une suite récurrente associée à f.

24. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a l'équivalence : $\quad x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Q}$.

Le but des questions 25 et 26 est de montrer que la suite u est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si le réel u_0 est un nombre rationnel.

25. Dans cette question, on suppose que u_0 est un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers a et b tels que $u_0 = \frac{a}{b}$ avec $0 \leq a \leq b$, a et b étant premiers entre eux.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n s'écrit sous la forme $u_n = \frac{h_n}{b}$ où h_n est un entier naturel inférieur ou égal à b.

(b) Démontrer qu'il existe un entier naturel N et un entier strictement positif p tels que $u_{N+p} = u_N$. En déduire que u est périodique à partir d'un certain rang.

26. On suppose que la suite u est périodique à partir d'un certain rang.

(a) Soit x un réel appartenant au segment $[0,1]$. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n dépendant de x vérifiant
$$f^n(x) = a_n x + b_n$$

(b) En déduire que u_0 est un nombre rationnel.

27. Soit p un entier strictement positif. On considère la suite u de premier terme $u_0 = \dfrac{2}{1+2^p}$.

(a) Donner les valeurs de u_k pour tout entier k compris entre 0 et p.

(b) Donner l'ensemble $V(u)$ des valeurs d'adhérence de u. On justifiera la réponse.

– Partie III : Force d'un point par rapport à une suite –

Pour les questions 28 à 30, on considère un nombre réel x et une suite réelle u. À tout réel strictement positif ε, on associe la suite $(H_m(x,u,\varepsilon))_{m\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad H_m(x,u,\varepsilon) = \frac{\mathrm{Card}\{n \in [\![0, m-1]\!] / \, |x-u_n| < \varepsilon\}}{m} \, ,$$

où $\mathrm{Card}\, A$ représente le cardinal d'un ensemble A. Ainsi, $H_m(x,u,\varepsilon)$ représente la proportion des m premiers éléments de la suite appartenant à la boule ouverte de centre x et de rayon ε.

28. Démontrer que la suite $(H_m(x,u,\varepsilon))_{m\in\mathbf{N}^*}$ est bornée. On note

$$H(x,u,\varepsilon) = \liminf_{m\to+\infty} H_m(x,u,\varepsilon) \, .$$

29. Démontrer que l'application $H(x,u,.)$ définie par

$$H(x,u,.) : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & H(x,u,\varepsilon) \end{array}$$

admet une limite à droite en 0 que l'on note $F(x,u)$.

*Cette limite est appelée **force** de x par rapport à la suite u.*

30. Démontrer que

$$0 \leq F(x,u) \leq 1 \, .$$

31. Soit u une suite réelle. On considère un entier p strictement positif et $(p+1)$ réels distincts que l'on note $x_0, x_1, \cdots, x_p$.

(a) Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{p} F(x_k,u) \leq 1 \, .$$

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels distincts. Démontrer que la série $\sum F(x_k,u)$ est convergente avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k,u) \leq 1 \, .$$

32. On considère dans cette question u une suite réelle convergente vers un réel ℓ.

(a) Démontrer que

$$F(\ell,u) = 1 \, .$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\ell\}, \quad F(x,u) = 0 \, .$$

33. Démontrer que si un réel a une force strictement positive par rapport à une suite u alors il est valeur d'adhérence de cette suite.

Nous verrons grâce à la question 35 que la réciproque est fausse.

34. Donner un exemple d'une suite bornée divergente u et d'un réel x vérifiant

$$F(x,u) = 1 \, .$$

35. Donner un exemple de suite u ayant une suite de valeurs d'adhérence $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux à deux distinctes et vérifiant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k,u) = 0 \, .$$

– Partie IV : Algorithme déterminant le nombre de valeurs d'adhérence –

Définition : on appelle **liste de réels** toute suite finie de nombres réels.
Par exemple : $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$.
À toute liste de réels $L = (x_1; \ldots; x_p)$ et à tout réel strictement positif r, on associe $\mathcal{G}(L, r)$ l'union suivante de segments :

$$\mathcal{G}(L,r) = \bigcup_{((i,j)/0 \leq x_j - x_i \leq r)} [x_i, x_j] \,.$$

On note $\mathcal{N}(L, r)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{G}(L, r)$, c'est-à-dire le nombre de segments disjoints composant $\mathcal{G}(L, r)$.

36. Soit $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$ et $r = 2$.
Donner sans justification $\mathcal{G}(L, r)$ et $\mathcal{N}(L, r)$.

37. On considère une liste de réels L et un réel r strictement positif. Écrire dans le langage de votre choix un algorithme permettant de déterminer $\mathcal{N}(L, r)$.
On pourra supposer qu'on dispose d'une fonction permettant de trier les éléments d'une liste par ordre croissant.

Jusqu'à la fin du problème, on considère une suite bornée u admettant un nombre fini de valeurs d'adhérence, notées $y_1, y_2, \cdots y_q$, **toutes de force strictement positive** *et un réel strictement positif r vérifiant pour tout $i \neq j$, $|y_i - y_j| \geqslant r$.*
On considère, pour tout entier naturel p strictement supérieur à 1, la liste

$$L_p = (u_p; u_{p+1}; \cdots; u_{p^2-1}) \,.$$

On considère enfin l'algorithme N.V.A. qui à l'entier p associe le nombre $N.V.A(p) = \mathcal{N}(L_p, \frac{2r}{5})$. Le but de cette dernière partie est de prouver que la suite $(N.V.A.(p))_{p \geq 2}$ est stationnaire et que les termes de cette suite à partir d'un certain rang sont égaux au nombre de valeurs d'adhérence de la suite u.
On considère un entier naturel p_0 (il en existe d'après la question **I-4a***) vérifiant*

$$\forall p \geq p_0, \quad u_p \in \bigcup_{k=1}^{q} \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\,.$$

38. Soit p un entier supérieur à p_0. Démontrer que

$$\forall (n,m) \in [\![p, p^2-1]\!]^2, \quad |u_n - u_m| \leq \frac{2r}{5} \Longleftrightarrow \exists k \in [\![1, q]\!]/(u_n, u_m) \in \left(\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\right)^2 \,.$$

39. En déduire que

$$\forall p \geq p_0, \quad \mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{q} \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\,.$$

40. Démontrer que si x est un réel de force strictement positive par rapport à u, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall p \geq p_\varepsilon, \quad \{u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p^2-1}\} \cap \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[\neq \emptyset \,.$$

41. En déduire qu'il existe un entier P tel que

$$\forall p \geq P, \forall k \in [\![1, q]\!], \quad \mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) \bigcap \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\neq \emptyset \,.$$

42. Démontrer que

$$\forall p \geq P, \quad N.V.A.(p) = q \,.$$

———— FIN DU SUJET ————