Agrégation Interne 2012

Corrigé de la seconde épreuve

Partie I : valeurs d'adhérence

A) Premières propriétés de $V(u)$

1. Nous avons, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

- si $x \in V(u)$, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $n \geq N$ tel que $||x - u_n|| \leq \varepsilon_0$: ceci signifie que x est adhérent à $T_N(u)$. On en déduit que $V(u) \subset \overline{T_N(u)}$;
- par définition de la fermeture d'une partie, $T_N(u) \subset \overline{T_N(u)}$;
- soit x un élément n'appartenant pas à $T_N(u) \cup V(u)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et N_0 tel que
$$B(x, \varepsilon_0) \cap T_{N_0}(u) = \emptyset.$$
Si $N_0 \leq N$, on a également $B(x, \varepsilon_0) \cap T_N(u) = \emptyset$; sinon, posons :
$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, ||x - u_N||, ||x - u_{N+1}||, \ldots, ||x - u_{N_0 - 1}||\}.$$
On a $\varepsilon_1 > 0$ car $x \notin T_N(u)$ et $B(x, \varepsilon_1) \cap T_N(u) = \emptyset$: dans les deux cas, $x \notin \overline{T_N(u)}$.

Nous avons ainsi démontré l'égalité demandée.

2. Nous avons, pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in V(u) &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ B(x, \varepsilon) \cap T_N(u) \neq \emptyset \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, \big(\forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap T_N(u) \neq \emptyset\big) \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, x \in \overline{T_N(u)} \\ &\iff x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{T_N(u)} \end{aligned}$$

3.(a) $V(u)$ est ainsi fermée, comme intersection de parties fermées.

3.(b) Si la suite u est bornée, il existe M tel que $||u_n|| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $V(u) \subset T_0(u) \subset \overline{B(0, M)}$, $V(u)$ est également bornée : E étant un espace vectoriel normé de dimension finie, $V(u)$ est un compact de E. Enfin, $V(u)$ est non vide car u est une suite du compact (car fermé borné) $\overline{B(0, M)}$: elle possède donc une valeur d'adhérence dans $\overline{B(0, M)}$.

4.(a) Montrons le résultat par l'absurde ; supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n,\ u_p \notin \bigcup_{i=0}^{n} B(\ell_i, \varepsilon).$$
On peut donc extraire une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)$ de u telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \notin \bigcup_{i=0}^{n} B(\ell_i, \varepsilon).$$

Cette sous-suite étant bornée, elle admet elle même une sous-suite convergente : sa limite ℓ est alors une valeur d'adhérence de u, ce qui est absurde car $||\ell - \ell_i|| \geq \varepsilon$ pour tout i.

4.(b) Si u converge vers ℓ, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ et $V(u) = \{\ell\}$. Si u ne possède qu'une valeur d'adhérence ℓ_0, le résultat précédent prouve que u converge vers ℓ_0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \in B(\ell_0, \varepsilon).$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $w_{2k} = u_k$ et $w_{2k+1} = v_k$. Comme u et v sont des sous-suites de w, $V(u) \cup V(v)$ est contenu dans $V(w)$. D'autre part, si $\left(w_{\varphi(n)}\right)_{n \geq 0}$ est une sous-suite de w qui converge vers $\ell \in V(w)$, φ prend ou bien une infinité de valeurs paires, ou bien une infinité de valeurs impaires. On peut donc extraire de cette sous-suite une nouvelle sous-suite qui sera ou bien sous-suite de u, ou bien sous-suite de v : on en déduit que $\ell \in V(u) \cup V(v)$.

B) Exemples

Remarque : la définition d'une partie discrète donnée par l'énoncé n'est pas la définition habituelle (une partie A d'un espace métrique E est dite discrète si tout point de A est isolé, i.e. si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$).

6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite discrète qui converge vers $\ell \in E$. Il existe alors $r > 0$ tel que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, u_p \neq u_q \Longrightarrow ||u_p - u_q|| \geq r.$$

Il existe d'autre part un rang N tel que :

$$\forall p \geq N,\ ||u_p - \ell|| < r/2.$$

On en déduit que pour $p, q \geq N$, $||u_p - u_q|| < r$, et donc que u est stationnaire à partir du rang N.

7. Soit u est une suite discrète. Pour tout $N \geq 0$, si $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente de $T_N(u)$, x est également discrète (car $T_0(x) \subset T_0(u)$) donc stationnaire : sa limite est donc élément de $T_N(u)$, qui est ainsi un fermé. Nous avons donc :

$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{T_N(u)} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} T_N(u)$$

8. $\{i \in \mathbb{N},\ 2^i \leq n\}$ est non vide (il contient 0) et majoré (la suite des puissances de 2 croît vers l'infini) : il admet donc un plus grand élément p. Nous avons alors $2^p \leq n < 2^{p+1}$ et le couple $(p, n - 2^p)$ est solution du problème.

Si (p', k') est une solution du problème posé, alors $2^{p'} \leq n < 2^{p+1}$ et $p' < p + 1$; de même, $2^p \leq n < 2^{p'+1}$ et $p' < p + 1$. Nous avons ainsi $p = p'$ et $k = n - 2^p = n - 2^{p'} = k'$.

9. On utilise deux variables x et p : x contient la valeur 2^p (x et p sont initialisées aux valeurs 1 et 0) et une boucle `while` permet d'incrémenter p jusqu'à ce que l'on ait $2^{p+1} > x$. En Maple, cela donne :

```
decomposition := proc(n)
local p,x;
x := 1;
p := 0;
while 2*x<=n do
   x := 2*x;
```

```
  p := p+1;
end do;
[p,n-x];
end;
```

10.(a) On obtient facilement :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k_n	0	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4

10.(b) La suite u est discrète et tout entier k apparaît une infinité de fois dans la suite u, puisque $k = u_{2^p+k}$ pour tout p tel que $k < 2^p$. On en déduit que $T_N(u) = \mathbb{N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, puis que $V(u) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} T_N(u) = \mathbb{N}$.

11.(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Notons δ le diamètre de l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap]0,1[$ (δ est strictement positif). Fixons ensuite un entier naturel p tel que $2^p \geq N$ et $2^{-p} < \delta$. Comme la subdivision $(k/2^p)_{0\leq k\leq 2^p}$ est de pas strictement inférieur à δ, il existe un entier k tel que

$$\frac{k}{2^p} \in\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap]0,1[$$

Nous avons alors $k \in [\![0, 2^p-1]\!]$: en posant $n = 2^p + k$, nous obtenons $N \leq 2^p \leq n$, $p = p_n$, $k = k_n$ et $|v_n - x| < \varepsilon$. Nous avons ainsi démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N,\ |v_n - x| \leq \varepsilon$$

i.e. que $x \in V(v)$.

11.(b) v est à valeur dans $[0,1]$, donc $V(u)$ est contenu dans $[0,1]$. Comme $V(u)$ est une partie fermée contenant $[0,1[$, $V(u) = [0,1]$.

C) Limite inférieure d'une suite réelle

Comme u est une suite réelle bornée, nous pouvons définir les réels $m = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

12. $T_N(u)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par m, elle admet une borne inférieure : m_N est bien défini.

13.(a) La suite (m_N) est croissante (pour tout N, $T_{N+1}(u) \subset T_N(u)$) et majorée par M : elle est donc convergente.

13.(b) Nous avons, pour tout N, $m = m_0 \leq m_N \leq M$, ce qui donne l'encadrement demandé par passage à la limite.

14. Notons ℓ la limite inférieure de u et fixons $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Comme m_k tend vers ℓ quand k tend vers l'infini, il existe k tel que $k \geq N$ et $|m_k - \ell| \leq \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure, il existe alors $n \geq k$ tel que $m_k \leq u_n \leq m_k + \varepsilon$: nous avons ainsi $n \geq N$ et $|u_k - \ell| \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que ℓ est une valeur d'adhérence de u.

15. Il existe $\varphi :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers ℓ quand n tend vers l'infini. Nous avons alors $m_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)}$ pour tout n, ce qui donne $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \ell$ en faisant tendre n vers l'infini.

Ceci prouve que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de u qui minore $V(u)$:

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \inf V(u) = \min V(u).$$

16. Nous avons pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq N,\ m_N(u) \leq u_n \leq v_n$$

$m_N(u)$ est donc un minorant de $T_N(v)$, d'où $m_N(v) \leq m_N(v)$. Un nouveau passage à la limite donne l'inégalité demandée.

17. Nous avons $m_N(u+v) \geq m_N(u) + m_N(v)$ pour tout N, d'où

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n+v_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n$$

par passage à la limite.

Avec $u = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ et $v = \left((-1)^{n+1}\right)_{n\geq 0}$, nous avons

$$0 = \liminf_{n\to+\infty}(u_n+v_n) > \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n = -2.$$

D) suites à évolution lente

18. La suite $u = (\ln n)_{n\geq 0}$ est à évolution lente mais diverge vers $+\infty$.

19. Comme $V(u)$ n'est pas connexe, il existe deux parties K_1 et K_2 de E telles que :

- $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ et $K_1 \cup K_2 = V(u)$;
- K_1 et K_2 sont non vides ;
- K_1 et K_2 sont des fermés de $V(u)$.

Comme $V(u)$ est un compact, K_1 et K_2 sont également compacts. [1]

20. L'application $f :\ K_1 \times K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à (x_1, x_2) associe $||x_1 - x_2||$ est continue et $K_1 \times K_2$ est un compact non vide : f est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que :

$$d(K_1, K_2) = \inf f = f(x_1, x_2) = ||x_1 - x_2|| > 0$$

puisque $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

21. Il est bien connu que pour toute partie non vide A de E, l'application $d_A :\ x \longrightarrow d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue. On en déduit que les parties Ω_i sont ouvertes, comme images réciproques par les applications continues d_{K_i} de l'ouvert $]-a/3, a/3[$.

K est donc fermé (intersection des trois fermés $\overline{B(0,M)}$, $E \setminus \Omega_1$ et $E \setminus \Omega_2$) et borné (contenu dans $\overline{B(0,M)}$) : il est compact car E est de dimension finie.

1. Ceci résulte de deux propriétés élémentaires :

- un fermé relatif à une partie fermée A de E est un fermé de E ;
- un fermé contenu dans un compact est un compact.

22. Comme u est à évolution lente, il existe un rang N_0 tel que $||u_{n+1} - u_n|| < a/3$ pour $n \geq N_0$.

Fixons $\ell_1 \in K_1$ et $\ell_2 \in K_2$; soit $N \geq N_0$. Il existe n_1 et n_2 tels que $N \leq n_1 \leq n_2$, $||\ell_1 - u_{n_1}|| < a/3$ et $||\ell_2 - u_{n_2}|| < a/3$. Nous avons ainsi $u_{n_1} \in \Omega_1$ et $u_{n_2} \notin \Omega_1$ (car u_{n_2} est élément de Ω_2, qui est disjoint de Ω_1) et il existe ainsi un indice n tel que :

- $n_1 < n \leq n_2$;
- $u_{n-1} \in \Omega_1$ et $u_n \notin \Omega_1$.

Comme u_{n-1} est élément de Ω_1, il existe $\lambda_1 \in K_1$ tel que $||u_{n-1} - \lambda_1|| < a/3$.
Si u_n était élément de Ω_2, il existerait $\lambda_2 \in K_2$ tel que $||u_n - \lambda_2|| < a/3$, et on aurait :

$$a \leq ||\lambda_1 - \lambda_2|| \leq ||\lambda_1 - u_{n-1}|| + ||u_{n-1} - u_n|| + ||u_n - \lambda_2|| < a/3 + a/3 + a/3 = a$$

ce qui est absurde. Ainsi, $u_n \in \overline{B(0,M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = K$. On en déduit donc que l'ensemble des n tels que u_n est élément de K est infini : on peut extraire de u une sous-suite v formée d'éléments de K ; K étant compact, v possède une valeur d'adhérence ℓ dans K. On en déduit :

$$\ell \in V(v) \subset V(u) = K_1 \cup K_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$$

ce qui est absurde car cette partie est disjointe de K.

Partie II : valeurs d'adhérence de suites itératives

23. Soit $\ell \in V(u)$ et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de u qui converge vers ℓ.

Comme f est continue, la suite $(u_{\varphi(n)+1}) = (f(u_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\ell)$, qui appartient donc à $V(u)$.

D'autre part, la suite $(u_{\varphi(n)-1})_{n\geq 1}$ est une suite du compact K : elle possède donc une valeur d'adhérence $\ell' \in V(u)$, limite d'une sous-suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)-1})$. Nous avons alors, toujours par continuité de f :

$$f(\ell') = \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi\circ\psi(n)-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi\circ\psi(n)} = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

et donc $\ell \in f(V(u))$.

24. Si $x \in [0, 1/2]$, $x \in \mathbb{Q} \iff 2x \in \mathbb{Q}$ et si $x \in]1/2, 1]$, $x \in \mathbb{Q} \iff 2(1-x) \in \mathbb{Q}$, d'où l'équivalence demandée.

25.(a) La preuve se fait par récurrence sur n :

- avec $h_0 = a$, on a bien $u_0 = h_0/b$ avec h_0 entier naturel inférieur ou égal à b ;
- soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe $h_n \in [\![0, b]\!]$ tel que $u_n = h_n/b$. Si u_n est inférieur à $1/2$, on pose $h_{n+1} = 2h_n$. Sinon, on pose $h_{n+1} = 2(b_n - h_n)$. Dans les deux, h_{n+1} est un entier naturel et $u_{n+1} = h_{n+1}/b$, ce qui impose $h_{n+1} \leq b$ puisque u est à valeurs dans $[0, 1]$.

25.(b) La suite h prend ses valeurs dans l'ensemble fini $[\![0, b]\!]$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $h_{N+p} = h_N$, i.e. tels que $u_{N+p} = u_N$. Une récurrence immédiate montre que la suite u est périodique de période p à partir du rang N.

26.(a) Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n, en ajoutant la propriété $|a_n| = 2^n$:

- quand $n = 0$, $f^n(x) = x = a_0 x + b_0$ avec $a_0 = 1 = 2^0$ et $b = 0$;

- soit $n \geq 0$ et supposons que $f^n(x) = a_n x + b_n$ avec $|a_n| = 2^n$ et $b_n \in \mathbb{Z}$. Si $f^n(x) \leq 1/2$, on pose $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = -2a_n$ et $b_{n+1} = 2(1 - b_n)$. Dans les deux cas, $|a_{n+1}| = 2^{n+1}$, $b_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $f^{n+1}(x) = a_{n+1}x + b_{n+1}$.

26.(b) Comme u est périodique à partir d'un certain rang, il existe $N \geq 0$ et $p > 0$ tel que $u_{N+p} = u_N$. En appliquant le résultat précédent avec $x = u_N$ et $n = p$, on peut écrire $u_{N+p} = au_N + b$ avec $|a| = 2^p$ et $b \in \mathbb{Z}$. Comme $a \neq 1$, cela donne $u_N = \dfrac{b}{1-a} \in \mathbb{Q}$. La question 24 montre alors que $u_{N-1}, \ldots, u_0 \in \mathbb{Q}$: u_0 est donc rationnel.

27.(a) Montrons par récurrence, pour k compris entre 0 et $p-1$, la propriété :

$$\mathcal{P}_k : \ u_k = \frac{2^{k+1}}{1+2^p}$$

- la propriété $\mathcal{P}_0$ est clairement vérifiée ;
- soit $k \in [\![0, p-2]\!]$ et supposons que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée. Comme $k \leq p-2$, $u_k \leq 1/2$ et $u_{k+1} = 2u_k = \dfrac{2^{k+2}}{1+2^p}$: $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.

Nous avons ensuite $u_{p-1} = \dfrac{2^p}{1+2^p} > 1/2$ (car $2^p > 1$) et donc

$$u_p = 2(1 - u_{p-1}) = \frac{2}{1+2^p} = u_0.$$

27.(b) La suite u est donc p-périodique : comme $T_N(u) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}\}$ pour tout N, la question 2 donne :

$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{T_N(u)} = \left\{ \frac{2}{1+2^p}, \frac{2^2}{1+2^p}, \ldots, \frac{2^p}{1+2^p} \right\}.$$

Partie III : force d'un point par rapport à une suite

28. On a clairement $0 \leq H_m(x, u, \varepsilon) \leq 1$ pour tout m : la suite considérée est donc bornée et admet une limite inférieure.

29. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Nous avons alors :

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \{n \in [\![0, m-1]\!],\ |x - u_n| < \varepsilon_1\} \subset \{n \in [\![0, m-1]\!],\ |x - u_n| < \varepsilon_2\}$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N},\ H_m(x, u, \varepsilon_1) \leq H_m(x, u, \varepsilon_2)$$

La question 16 prouve alors que $H(x, u, \varepsilon_1) \leq H(x, u, \varepsilon_2)$.

L'application $\varepsilon \longmapsto H(x, u, \varepsilon)$ est croissante et minorée par 0 sur $]0, +\infty[$: elle admet donc une limite à droite en 0. Plus précisément :

$$H(x, u, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \inf_{\eta > 0} H(x, u, \eta)$$

30. Nous avons $0 \leq H(u, x, \varepsilon) \leq 1$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $0 \leq F(x, u) \leq 1$ par passage à la limite.

31.(a) Soit $\eta = \min\{|x_i - x_j|,\ i \neq j\}$. η est strictement positif et fixons $\varepsilon \in\ ]0, \eta/2[$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les $p+1$ ensembles

$$E_k = \{n \in [\![0, m-1]\!],\ /\ |x_k - u_n| < \varepsilon\}$$

sont deux à deux disjoints (si $n \in E_i \cap E_j$ avec $i \neq j$, $\eta \leq |x_i - x_j| \leq |x_i - u_n| + |u_n - x_j| \leq 2\varepsilon < \eta$). On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{p} \operatorname{Card}(E_k) \leq \operatorname{Card}([\![0, m-1]\!]) = m$$

ce qui donne

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} H_m(x_k, u, \varepsilon) \leq 1$$

puis en prenant la limite inférieure :

$$\forall\, \varepsilon \in]\,0, \eta/2\,[,\ \sum_{k=0}^{p} H(x_k, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p} \liminf_{m\to+\infty} H_m(x_k, u, \varepsilon) \leq \liminf_{m\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} H_m(x_k, u, \varepsilon) \right) \leq 1$$

soit enfin, en faisant tendre ε vers 0^+ :

$$\sum_{k=0}^{p} F(x_k, u) \leq 1$$

31.(b) La somme partielle partielle de cette série à termes positifs est majorée par 1 : la série est donc convergente et sa somme est majorée par 1.

32.(a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Pour tout $m \geq n_0$, nous avons donc $H_m(\ell, u, \varepsilon) \geq \dfrac{m - n_0}{m}$. On en déduit :

$$H(\ell, u, \varepsilon) = \liminf_{m\to+\infty} H_m(\ell, u, \varepsilon) \geq \liminf_{m\to+\infty} \frac{m - n_0}{m} = 1$$

puis $F(\ell, u) \geq 1$, i.e. $F(\ell, u) = 1$ avec l'inégalité de la question 30.

32.(b) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ell\}$, $0 \leq F(x, u)$ et $F(x, u) + F(\ell, u) \leq 1$, donc $F(x, u) = 0$.

33. Démontrons le résultat par contraposée : si a n'est pas valeur d'adhérence de u, il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On a donc

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ H_m(a, u, \varepsilon) \leq \frac{N}{m}$$

et donc $F(a, u) \leq H(a, u, \varepsilon) \leq 0$.

34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$ si n est une puissance de 2 et $u_n = 1$ sinon. La suite u ne converge pas, mais pour $\varepsilon \in\ ]0, 1]$:

$$H_m(1, u, \varepsilon) = \frac{m - p_{m-1} - 1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1\ (p_{m-1} \underset{+\infty}{\sim} \ln_2 m)$$

car les puissances de 2 comprises entre 0 et $m-1$ sont $2^0, 2^1, \ldots, 2^{p_{m-1}}$. La suite $(H_m(1, u, \varepsilon))_{m\geq 0}$ converge vers 1, qui est ainsi sa seule valeur d'adhérence et également sa limite inférieure. En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons $F(1, u) = 1$.

35. Considérons la suite u définie à la question 10, pour laquelle $V(u) = \mathbb{N}$. Pour $\varepsilon \in]\,0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \text{Card}\{n \in [\![0, m-1]\!],\ |k - u_n| < \varepsilon\} &= \text{Card}\{n \in [\![0, m-1]\!],\ u_n = k\}\\ &\leq \text{Card}\{n \in [\![0, m-1]\!],\ u_n = 0\}\\ &= p_{m-1} + 1\end{aligned}$$

On en déduit comme à la question précédente que $F(k, u) = 0$ pour tout k : u répond à la question posée.

Partie IV : algorithme déterminant le nombre de valeurs d'adhérence

36. $\mathcal{G}(L, 2) = [2, 5] \cup [12, 15] \cup [20, 20]$ et $\mathcal{N}(L, 2) = 3$.

37. On commence par trier les x_i ; on remarque ensuite que pour $L = (y_1; y_2; \ldots; y_p)$ liste triée, on a :

- $\mathcal{N}(L, r) = 1$ si $p = 1$;
- $\mathcal{N}(L, r) = \mathcal{N}((y_2; \ldots; y_p), r)$ si $y_2 - y_1 \leq r$ et $\mathcal{N}(L, r) = 1 + \mathcal{N}((y_2; \ldots; y_p), r)$ sinon.

En langage Maple, cela donne (la liste $(x_1; x_2; \ldots; x_k)$ est représentée par l'objet de type `list` $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$) :

```
calcul_N_aux := proc(L,r)
if nops(L)=1 then
   1
elif L[2]-L[1]>r then
   1+calcul_N_aux(subsop(1=NULL,L),r)
else
   calcul_N_aux(subsop(1=NULL,L),r)
end if;
end;

calcul_N := proc(L,r)
calcul_N_aux(sort(L),r)
end;
```

38. Soient $n, m \in [\![p, p^2 - 1]\!]$ tels que $|u_n - u_m| \leq 2r/5$. Comme $n, m \geq p_0$, il existe k et k' dans $[\![1, q]\!]$ tels que

$$|y_k - u_n| < r/5 \text{ et } \ |y_{k'} - u_m| < r/5.$$

On en déduit :

$$|y_k - y_{k'}| \leq |y_k - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - y_{k'}| < 4r/5 < r,$$

ce qui impose $k = k'$: les deux termes u_n et u_m appartiennent à l'intervalle $]y_k - r/5, y_k + r/5[$.

39. Soit $p \geq p_0$. Notons A l'ensemble des couples (i, j) tels que $p \leq i, j \leq p^2 - 1$ et $0 \leq |u_i - u_j| \leq 2r/5$. La question précédente prouve que pour tout $(i, j) \in A$, il existe k compris entre 1 et q tel que $[u_i, u_j] \subset]y_k - r/5, y_k + r/5[$.
On en déduit :

$$\mathcal{G}(L_p, 2r/5) = \bigcup_{(i,j)\in A} [u_i, u_j] \subset \bigcup_{k=1}^{q}]y_k - r/5, y_k + r/5[.$$

40. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $H(x, u, \varepsilon) \geq F(x, u) > 0$, en fixant δ strictement compris entre 0 et $F(x, u)$, il existe un rang m_ε tel que $H_m(x, u, \varepsilon) > \delta$ pour tout $m \geq m_{ep}$. Pour $p \geq \max(\sqrt{m_\varepsilon}, 1/\delta) = p_\varepsilon$, nous avons :

$$\text{Card}\left\{n \in [\![0, p^2 - 1]\!],\ |x - u_n| < \varepsilon\right\} = p^2\, H_{p^2}(x, u, \varepsilon) > p^2\delta \geq p$$

Comme $[\![0, p-1]\!]$ est de cardinal p, il existe donc $m \in [\![p, p^2-1]\!]$ tel que $|x - u_n| < \varepsilon$. Nous avons ainsi démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_\varepsilon,\ \left\{u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p^2-1}\right\} \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$$

41. Pour $k \in [\![1, q]\!]$, on peut appliquer le résultat précédent avec $\varepsilon = r/5$ et $x = y_k$; il existe ainsi p_k tel que :

$$\forall p \geq p_\varepsilon,\ \left\{u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p^2-1}\right\} \cap \,]y_k - r/5, y_k + r/5[\neq \emptyset$$

En posant $P = \max\{p_1, \ldots, p_q\}$, nous avons que pour tout $p \geq P$ et pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, il existe $i \in [\![p, p^2-1]\!]$ tel que $u_i \in \,]y_k - r/5, y_k + r/5[$. Comme $u_i \in \mathcal{G}(L_p, 2r/5)$, on a bien :

$$\forall p \geq P,\ \forall k \in [\![1, q]\!],\ \mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) \cap \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\neq \emptyset$$

42. Soit $p \geq P$. On peut écrire :

$$\mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) = \bigcup_{i=1}^{N} [u_{m_i}, u_{M_i}]$$

avec $u_{m_1} \leq u_{M_1} < u_{m_2} \leq u_{M_2} < qq \ldots < u_{m_N} \leq u_{M_N}$ et $N = \mathcal{N}(L_p, 2r/5) = N.V.A.(p)$.

Pour tout i compris entre 1 et N, il existe alors un unique k_i tel que $u_{m_i} \in \,]y_{k_i} - r/5, y_{k_i} + r/5[$. Comme les intervalles $]y_k - r/5, y_k + r/5[$ sont ouverts et deux à deux disjoints, l'intervalle $[u_{m_i}, u_{M_i}]$, qui est contenu dans la réunion des intervalles $]y_k - r/5, y_k + r/5[$, est nécessairement contenu dans $]y_{k_i} - r/5, y_{k_i} + r/5[$.

Nous allons montrer que l'application $i \longmapsto k_i$ est une bijection de $[\![1, N]\!]$ sur $[\![1, q]\!]$:

- pour $k \in [\![1, q]\!]$, il existe, d'après la question 41, un $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $[u_{m_i}, u_{M_i}] \cap \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\neq \emptyset$, i.e. tel que $k = k_i$ et l'application est surjective.

- si i, j sont deux éléments de $[\![1, N]\!]$ tels que $k_i = k_j$, on a $|u_{m_i} - u_{m_j}| < 2r/5$; la définition de $\mathcal{G}(L_p, 2r/5)$ donne $[u_{m_i}, u_{m_j}] \subset \mathcal{G}(L_p, 2r/5)$, ce qui impose $i = j$: l'application est injective.

On en déduit que $N = q$: la suite $N.V.A.(p)$ est stationnaire et égale à q à partir du rang P.