

- PRÉLIMINAIRES -

1. Les égalités $\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i z_i = 1$ donnent $\sum_{i=1}^n t_i(1 - z_i) = 0$. Puisque $|z_i| \leq 1$ et z_i réel, on a $(1 - z_i) \geq 0$ donc $t_i(1 - z_i) \geq 0$ pour tout i .

On en déduit $t_i(1 - z_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et puis les t_i sont strictement positifs :

$$\boxed{z_i = 1 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

2. En posant $Z = \sum_{i=1}^n t_i z_i$, on a $\sum_{i=1}^n t_i \left(\frac{z_i}{Z}\right) = 1$ donc, en notant $z'_i = \Re\left(\frac{z_i}{Z}\right)$, on a $\sum_{i=1}^n t_i z'_i = 1$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z'_i| = \left|\Re\left(\frac{z_i}{Z}\right)\right| \leq \frac{|z_i|}{|Z|} = |z_i| \leq 1$ (puisque $|Z| = 1$ par hypothèse).

D'après la question précédente, on a $z'_i = 1$ pour tout i , soit $\Re\left(\frac{z_i}{Z}\right) = 1$. Puisque $\left|\frac{z_i}{Z}\right| \leq 1$, cela implique $\frac{z_i}{Z} = 1$ pour tout i , soit :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_i = Z \text{ avec } |Z| = 1.}$$

- PARTIE I -

1. La somme des deux colonnes de $P_{x,y}$ est la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de $P_{x,y}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

La trace de la matrice $P_{x,y}$ est $1 - \frac{x+y}{2}$, donc l'autre valeur propre de $P_{x,y}$ est $-\frac{x+y}{2}$.

Deux cas se présentent :

- Si $x + y \neq -2$, $P_{x,y}$ possède deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Le système $P_{x,y} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ équivaut à $(1+y)a + (1+x)b = 0$, donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{x+y}{2}$ est par exemple $\begin{pmatrix} -1-x \\ 1+y \end{pmatrix}$.
- Si $x + y = -2$, alors 1 est valeur propre double. La matrice $P_{x,y}$ est alors diagonalisable si et seulement si elle est semblable, donc égale, à I_2 , c'est-à-dire si et seulement si $x = y = -1$. Dans ce cas, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est \mathbb{R}^2 tout entier ; sinon, le sous-espace propre associé est la droite déjà trouvée, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En conclusion :

$$\boxed{P_{x,y} \text{ est diagonalisable si et seulement si } x + y \neq -2 \text{ ou } x = y = -1.}$$

2. a) Ici on a forcément $x + y \neq -2$. Si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteur propre s trouvés précédemment on a :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1-x \\ 1 & 1+y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}P_{x,y}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui est le résultat voulu avec $u = -\frac{x+y}{2} \in]-1, 1[$ et $U = Q^{-1}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on aura donc $P_{x,y} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^k \end{pmatrix} U$ donc, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto U^{-1}MU$ (l'espace $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ étant de dimension finie), et puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = 0$, on en déduit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{x,y}^k = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U = L.$$

La matrice L est de rang 1 ; il s'agit de la matrice de la projection sur la droite vectorielle associée à la valeur propre 1 parallèlement à celle associée à la valeur propre $-\frac{x+y}{2}$.

- c) C'est du calcul : on a vu que $U^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & -1-x \\ 1 & 1+y \end{pmatrix}$, $\det Q = 2+x+y$ donc d'après des formules vues en cours $U = Q^{-1} = \frac{1}{2+x+y} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit $U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U \dots$

Autre solution plus élégante :

L est la matrice de la projection sur la droite de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement à celle de base $\begin{pmatrix} -1-x \\ 1+y \end{pmatrix}$, donc si $a, b \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ doit vérifier $a' = b'$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1-x \\ 1+y \end{pmatrix}$ ce qui conduit par soustraction des deux égalités à $\lambda(2+x+y) = a - b$ puis

$a' = b' = a - \frac{a-b}{2+x+y}(1+x) = \frac{1}{2+x+y} [(1+y)a + (1+x)b]$, et on obtient ainsi l'expression analytique de la projection dont la matrice est :

$$L = \frac{1}{2+x+y} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix}.$$

3. Pas de question n°3...

4. $\chi_A = X^2 - (\text{tr} A)X + \det A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc :

$$\Delta_A = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc.$$

5. Les coefficients de A étant strictement positifs, on a évidemment $\Delta_A \geq 4bc > 0$.

6. Le discriminant de χ_A étant strictement positif, χ_A possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 .

On a $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} A = a + d > 0$. Si on suppose $\lambda_1 > \lambda_2$, on en déduit immédiatement :

$$\lambda_1 > |\lambda_2|.$$

7. Puisque A possède deux valeur propres distinctes, elle est diagonalisable ; il existe donc une matrice P inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'où pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} P^{-1}$.

Plusieurs cas sont à considérer :

- Si $\lambda_1 < 1$ (on rappelle que $\lambda_1 > 0$), alors $|\lambda_2| < 1$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_1^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_2^k = 0$ et, pour des raisons déjà invoquées, on en déduit $\lim A^k = O_2$.

- Si $\lambda_1 = 1$, alors $|\lambda_2| < 1$ et on aura $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = L$, où L est la matrice de la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 (c'est une droite), parallèlement au sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 .

On a vu dans l'exemple précédent comment on peut obtenir facilement cette matrice.

- Enfin, si $\lambda_1 > 1$, la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est évidemment divergente.

8. - Dans le cas $\lambda_1 = 1$, on peut considérer une matrice du type $P_{x,y}$ vue dans la question 1. Ses valeurs propres sont 1 et $-\frac{x+y}{2}$, et les coefficients de cette matrice sont strictement positifs dès que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Il suffit alors de prendre $x = y = -\lambda_2$, et cette condition sera vérifiée puisque $|\lambda_2| < \lambda_1 = 1$.

- Dans le cas général, puisque λ_1 est strictement positif, on peut trouver par la méthode précédente une matrice du type voulu dont les valeur propres sont 1 et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Il suffit ensuite de la multiplier par λ_1 .

- PARTIE II -

II.A.

1. a) Puisque I_n et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$C^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \beta^{k-i} B^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{k}{i} \beta^{k-i} B^i$$

puisque $B^i = 0$ dès que $i \geq \ell$.

- b) Le résultat est immédiat si $\beta = 0$ puisque alors $C^k = 0$ dès que $k \geq \ell$.

On peut donc supposer $\beta \neq 0$. Soit $i \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket$ fixé, et posons $u_k = \binom{k}{i} \beta^{k-i}$. Alors $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = |\beta| \frac{\binom{k+1}{i}}{\binom{k}{i}} =$

$|\beta| \frac{k+1}{k+1-i} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} |\beta| < 1$. D'après la règle de d'Alembert pour les suites numériques, on en déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

Ainsi, C^k est une somme de ℓ termes qui tendent tous vers O_2 , donc :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} C^k = O_2.}$$

2. a) i. D'après le cours sur les noyaux itérés, la suite des $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ est strictement croissante jusqu'à un certain rang p , puis est stationnaire (*savoir refaire les démonstrations le jour du concours !*). On aura donc $F_\alpha = \text{Ker}(A - \alpha I_n)^p$.

Cela prouve que F_α est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n , stable par A (car noyau d'un polynôme en A , encore un résultat du cours).

Remarque importante pour la suite :

En fait, p est égal à l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme minimal de A ; en effet, si le polynôme minimal de A s'écrit $\pi_A = (X - \alpha)^q Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, on aura d'après le théorème de décomposition des noyaux $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \alpha I_n)^q \oplus \text{Ker}(Q(A))$.

Si on a $p > q$, alors π_A divise le polynôme $(X - \alpha)^p Q$; ce polynôme est donc annulateur de A et, toujours d'après le théorème de décomposition des noyaux, $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \alpha I_n)^p \oplus \text{Ker}(Q(A))$. Puisque $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^q \subset \text{Ker}(A - \alpha I_n)^p$, on en déduit pour des raisons de dimensions, $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^q = \text{Ker}(A - \alpha I_n)^p$, ce qui contredit la définition de p .

Donc $p \leq q$; si on avait $p < q$, le polynôme $(X - \alpha)^p Q$ ne pourrait être annulateur de A , donc $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^p \oplus \text{Ker}(Q(A))$ serait strictement inclus dans E , et puisque $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^p \subset \text{Ker}(A - \alpha I_n)^q$ on aurait pour des raisons de dimension $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^p \subsetneq \text{Ker}(A - \alpha I_n)^q$ ce qui là encore contredit la définition de p .

- ii. On a, par définition, $(A_\alpha - \alpha \text{Id}_{F_\alpha})^p = 0$ soit $A_\alpha = \alpha \text{Id}_{F_\alpha} + B_\alpha$ avec B_α nilpotent (d'indice p). D'après **II.1.b** on a donc bien :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\alpha^k = 0.}$$

- b) Le corps de base étant \mathbb{C} , le polynôme caractéristique de A est scindé. Notons $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^q (X - \alpha_i)^{m_i}$,

où les α_i sont les valeurs propres distinctes de A et m_i l'ordre de multiplicité de α_i .

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A et d'après le théorème de décomposition des noyaux (admis en début d'énoncé) on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^q \text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{m_i}.$$

Remarque :

Les sous-espaces $F_i = \text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{m_i}$ sont en fait les sous-espaces caractéristiques F_{α_i} : en effet, on a vu en **2.a** que $F_{\alpha_i} = \text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{p_i}$ où p_i est l'ordre de multiplicité de α_i dans le polynôme minimal π_A ; puisque π_A divise χ_A , on aura $p_i \leq m_i$ donc $\text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{m_i} = \text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{p_i}$ puisque la suite des noyaux itérés $\text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^k$ est stationnaire à partir du rang p_i .

Chaque sous-espace $F_i = \text{Ker}(A - \alpha_i I_n)^{m_i}$ est stable par A , et en notant A_i l'endomorphisme induit par A sur ce sous-espace, on a $A_i = \alpha_i \text{Id}_{F_i} + B_i$, où B_i est nilpotent (d'indice $\leq m_i$). Puisque l'on suppose $|\alpha_i| < 1$, on déduit encore de II.1.b que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_i^k = 0$. Cela signifie que la suite $(A^k x)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 pour tout vecteur x de F_i , et puisque $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^q F_i$, on aura $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k x = 0$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ par linéarité. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Si } \rho(A) < 1, \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_n.}$$

Remarque utile pour la suite :

En reprenant les notations ci-dessus, si l'on se place dans une base formée de la réunion des sous-espaces caractéristiques F_i , la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A sera diagonale par blocs, chaque bloc étant la matrice d'un endomorphisme de F_i de la forme $\alpha_i \text{Id}_{F_i} + b_i$ avec b_i nilpotent. Par trigonalisation, on peut même trouver une base où cette matrice sera de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_p \end{array} \right)$$

Deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique, on a aussi, en faisant un calcul par blocs, $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^q (X - \alpha_i)^{\dim F_i}$, ce qui prouve que $\dim F_i = m_i$ pour tout i ; ainsi, pour résumer les résultats de toutes nos remarques, on a :

Le sous-espace caractéristique F_α associé à une valeur propre α de A est égal à $\text{Ker}(A - \alpha I_n)^p$ où p est l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme minimal de A , et sa dimension est égale à l'ordre de multiplicité de α dans le polynôme caractéristique de A .

- c) On suppose ici $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$. Si α est une valeur propre de A et si $x \neq 0$ est un vecteur propre associé, on aura $Ax = \alpha x$ puis par une récurrence facile, $A^k x = \alpha^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^k x = 0$ ce qui implique $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^k = 0$ donc $|\alpha| < 1$. Cela étant valable pour toute valeur propre de A on en déduit :

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \text{ alors } \rho(A) < 1.}$$

II.B.

1. Les valeurs propres de $\frac{1}{\gamma} A$ sont les $\frac{\alpha}{\gamma}$ avec $\alpha \in \text{Sp}(A)$. Ainsi, $\rho(A/\gamma) = \frac{\rho(A)}{\gamma}$, et la suite $((A/\gamma)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $\rho(A/\gamma) < 1$ soit $\rho(A) < \gamma$. Donc :

L'ensemble des réels γ tels que la suite $((A/\gamma)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tende vers 0 est l'intervalle $] \rho(A), +\infty[$.

2. On a $A^2y = Ay + Ax = y + 2x$ puis $A^3y = Ay + 2Ax = y + 3x$ etc.. et par une récurrence facile $A^k y = y + kx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque x est non nul, la suite $(A^k y)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc ne peut être inclus dans un compact (rappelons que, dans tout espace vectoriel normé, une partie compacte est nécessairement fermée et bornée, la réciproque étant vraie en dimension finie).

3. a) Si $\rho(A) < 1$, la suite (A^k) tend vers 0 ce qui est exclu ici. Donc $\rho(A) \geq 1$.

Soit γ un réel > 1 . Alors la suite $((A/\gamma)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque A^k tend vers B et $\frac{1}{\gamma^k}$ tend vers 0. On a donc $\gamma > \rho(A)$ d'après II.B.1. Cela étant vrai pour tout réel $\gamma > 1$, on a $\rho(A) \leq 1$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = B \neq 0 \text{ alors } \rho(A) = 1.}$$

b) Soit α une valeur propre de A telle que $|\alpha| = 1$, et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k x = \alpha^k x$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^k x = Bx$. x étant non nul, il existe une de ses coordonnées $x_i \in \mathbb{C}$ telle que $x_i \neq 0$. La suite complexe $(\alpha^k x_i)$ converge dans \mathbb{C} vers le complexe $(Bx)_i$ donc la suite α^k converge (vers $(Bx)_i/x_i$).

Soit $\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^k$. α étant de module 1, il en est de même des α^k donc de ℓ , d'où $\ell \neq 0$. De plus $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^{k+1} = \ell = \alpha \ell$. Donc $\boxed{\alpha = 1.}$

c) Si F_1 n'est pas égal à $\text{Ker}(A - I_n)$, alors $\text{Ker}(A - I_n) \subsetneq \text{Ker}(A - I_n)^2$. Il existe donc y tel que $(A - I_n)y \neq 0$ et $(A - I_n)^2 y = 0$. En posant $x = (A - I_n)y$ on aura $Ay = y + x$ et $Ax = x$ avec $x \neq 0$. La suite $(A^k y)$ n'est donc pas bornée d'après II.B.2, alors qu'elle converge vers By : contradiction. Ainsi :

$$\boxed{F_1 = \text{Ker}(A - I_n).}$$

- PARTIE III -

1. C'est immédiat : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(Aw)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} w_j$ donc $Aw = w$ équivaut à $\sum_{j=1}^n a_{i,j} w_j = w_i$ pour tout i (de plus les coefficients de A sont ici supposés positifs).

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}_n, A \in \mathcal{S}_n \iff Aw = w.}$$

2. – Posons $AB = C$. Avec les notations usuelles on a

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k}$$

donc si les coefficients de A et de B sont positifs, il en est de même de ceux de C.

$$\boxed{A, B \in \mathcal{P}_n \Rightarrow AB \in \mathcal{P}_n.}$$

– Si de plus A et B appartiennent à \mathcal{S}_n alors $Aw = Bw = w$ donc $(AB)w = w$ et $AB \in \mathcal{S}_n$ d'après la question précédente.

$$\boxed{A, B \in \mathcal{S}_n \Rightarrow AB \in \mathcal{S}_n.}$$

3. a) Soit $v \in \mathcal{B}$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$|(Av)_i| = \left| \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\in \mathbb{R}_+} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \underbrace{|v_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

donc :

$$\boxed{A \in \mathcal{S}_n \text{ et } v \in \mathcal{B} \Rightarrow Av \in \mathcal{B}.}$$

b) Soit α une valeur propre de A , et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $v = \frac{x}{\|x\|_\infty} \in \mathcal{B}$ (où $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$).

D'après ce qui précède, $Av \in \mathcal{B}$, soit $\|Av\|_\infty \leq 1$ d'où $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ (en d'autres termes, la norme subordonnée de A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est ≤ 1). Puisque $Ax = \alpha x$ et $\|x\|_\infty \neq 0$, on en déduit $|\alpha| \leq 1$, donc $\rho(A) \leq 1$.

Mais $Aw = w$, c'est-à-dire que 1 est valeur propre de A donc :

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{S}_n, \rho(A) = 1.}$$

4. a) On a donc ici $Av = \alpha v$ avec $v \neq 0$ et $|\alpha| = 1$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|v_i| = \|v\|_\infty$, de sorte que $v_i \neq 0$ et $\left| \frac{v_j}{v_i} \right| \leq 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

L'égalité $Av = \alpha v$ implique en particulier $(Av)_i = \alpha v_i$ d'où $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{v_j}{v_i} = \alpha$ (*). En appliquant les résultats

de la question préliminaire avec $t_j = a_{i,j}$ et $z_j = \frac{v_j}{v_i}$ (on a bien $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, les t_j réels strictement positifs

et $\left| \sum_{j=1}^n t_j z_j \right| = |\alpha| = 1$), on en déduit qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que pour tout

$j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{v_j}{v_i} = z$. En appliquant cette relation à $j = i$, on obtient $z = 1$ donc tous les v_j sont égaux, donc v est proportionnel à w . Enfin, en remplaçant dans (*), on trouve $\alpha = 1$. Finalement :

Si $A \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$, la seule valeur propre de A de module 1 est 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par w .

b) Si μ était non nul, on pourrait appliquer les résultats de **II.B.2** avec $x = \mu w$ et $y = v$. La suite $(A^k v)$ ne serait donc pas bornée. Or $A^k v \in \mathcal{B}$ pour tout entier k puisque \mathcal{B} est stable par A d'après **III.3**. Il y a donc contradiction, et finalement, on a bien :

$$\boxed{\mu = 0.}$$

c) On remarque déjà que, d'après **4.a**, $\text{Ker}(A - I_n)$ est la droite vectorielle de base w .

On procède alors comme dans **II.3.c** : Si F_1 n'est pas égal à $\text{Ker}(A - I_n)$, alors $\text{Ker}(A - I_n) \subsetneq \text{Ker}(A - I_n)^2$. Il existe donc $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $(A - I_n)v \neq 0$ (donc $v \neq 0$) et $(A - I_n)^2 v = 0$. Quitte à diviser v par $\|v\|_\infty$, on peut supposer $v \in \mathcal{B}$. En posant $x = (A - I_n)v$ on aura $Av = v + x$ et $Ax = x$ avec $x \neq 0$. $x \in \text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(\{w\})$ donc il existerait $\mu \neq 0$ tel que $x = \mu w$, soit $Av = v + \mu w$ ce qui contredit le résultat précédent.

Or on a vu en **II.A.2.b** que la dimension de chaque sous-espace caractéristique est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Ici $F_1 = \text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1 donc :

Pour $A \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$, 1 est valeur propre simple de A .

d) Notons $G_1 = \text{Im}(A - I_n)$; puisque $F_1 = \text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1, le théorème du rang donne $\dim G_1 = n - 1$.

D'autre part, soit $x \in F_1 \cap G_1$; supposons x non nul; $x \in G_1$ donc il existe v tel que $x = (A - I)v$, et quitte à remplacer x par $\frac{x}{\|v\|_\infty}$ ($v \neq 0$ puisque $x \neq 0$), on peut supposer $v \in \mathcal{B}$. De plus, $x \in F_1$ donc il existe μ tel que $x = \mu w$. On a ainsi $Av = v + \mu w$ avec $v \in \mathcal{B}$ et $\mu \neq 0$, ce qui est impossible d'après **4.b**.

On a donc $F_1 \cap G_1 = \{0\}$, et F_1 et G_1 sont donc supplémentaires. De plus, G_1 est stable par A puisqu'il est de la forme $\text{Im}(P(A))$ avec P polynôme (résultat du cours). Dans une base formée de w et d'une base de

G_1 , la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est donc de la forme $\begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,0} & B \end{bmatrix}$

avec $B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. En notant U la matrice de passage cette nouvelle base à la base canonique, on aura bien :

$$A = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,0} & B \end{bmatrix} U \text{ avec } B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

Enfin, un calcul par blocs donne $\chi_A = (1 - X)\chi_B$. Les valeurs propres de B sont donc celle de A exceptée 1 (car 1 est valeur propre simple). Comme toute valeur propre de A autre que 1 est de module < 1 d'après **3.b** et **4.a**, on en déduit $\rho(B) < 1$.

- e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^k \end{bmatrix} U$. Puisque $\rho(B) < 1$ la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers O_{n-1} , donc la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers la matrice $L = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O_{n-1} \end{bmatrix} U$, qui est la matrice de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$. Cette matrice est évidemment de rang 1.
- f) Puisque L est la matrice d'une projection sur $\text{Vect}(\{w\})$, les vecteurs colonnes de L sont tous proportionnels à w . Donc L est bien de la forme

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

De plus, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto Mw$, puisque $A^k w = w$ pour tout entier k , on aura $Lw = w$ donc $\sum_{i=1}^n u_i = 1$.

Les coefficients de A étant des réels positifs, il en est de même de ceux des A^k donc par passage à la limite, les u_i sont des réels positifs.

(on pouvait aussi évoquer le fait que l'ensemble \mathcal{S}_n est un fermé comme intersection de fermés images réciproques de fermés par des applications continues, donc L appartient à \mathcal{S}_n d'après la caractérisation séquentielle des fermés).

Il reste à démontrer que les u_i sont strictement positifs. Si l'on avait, par exemple $u_1 = 0$, cela signifierait que l'image par L du premier vecteur e_1 de la base canonique est nulle, donc que $e_1 \in \text{Im}(A - I_n)$.

Il existerait donc $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ay - y = e_1$. Puisque $Aw = w$, le vecteur $z = y - y_1 w$ vérifie aussi $Az - z = e_1$. En écrivant les coordonnées de ces vecteurs, on obtient un système de n équations. Les $n - 1$ dernières équations s'écrivent

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j = z_i.$$

Par construction de z , on a $z_1 = 0$. Si l'un des z_i pour $i \geq 2$ était non nul, en considérant l'indice i_0 tel que

$|z_{i_0}| = \max_{2 \leq i \leq n} |z_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$, on obtiendrait $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \frac{z_j}{z_{i_0}} = 1$ avec $\left| \frac{z_j}{z_{i_0}} \right| \leq 1$ pour tout j et $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} = 1$ avec

les $a_{i_0,j} > 0$ donc d'après le résultat de la question préliminaire, on aurait tous les z_j égaux. Mais dans ce cas, z serait nul puisque $z_1 = 0$, d'où la contradiction.

- g) Puisque $\chi_{tA} = \chi_A$, 1 est aussi valeur propre simple de tA , et $\text{Ker}({}^tA - I_n)$ est une droite vectorielle. Si z est un vecteur propre de tA pour la valeur propre 1, on a ${}^tAz = z$ d'où $({}^tA)^k z = z$ soit ${}^tA^k z = z$. Par passage à la limite (par continuité de l'application linéaire $M \mapsto {}^tM$), on obtient ${}^tLz = z$. Donc z appartient nécessairement à l'image de tL ; la matrice tL est une matrice de rang 1 dont les colonnes sont toutes égales au vecteur u de coordonnées (u_1, \dots, u_n) , donc z est colinéaire à u . Réciproquement, compte tenu de $\sum_{i=1}^n u_i = 1$ il est facile de vérifier que ${}^tLu = u$. Par conséquent :

$$\text{Ker}({}^tA - I_n) \text{ est la droite vectorielle de base } u.$$

- h) Si tA est aussi dans \mathcal{S}_n , $\text{Ker}({}^tA - I_n)$ est la droite vectorielle engendrée par w d'après **4.a**. Donc u et w sont colinéaires; la condition $\sum_{i=1}^n u_i = 1$ implique alors $u_i = \frac{1}{n}$ pour tout i . En conclusion :

Si A et tA appartiennent à $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$, L est la matrice dont tous les termes sont égaux à $\frac{1}{n}$.

5. a) Notons encore L la matrice dont tous les termes sont égaux à $\frac{1}{n}$. Il est clair que L appartient à \mathcal{S}_n . Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et, pour tout $t \in]0, 1]$, $A_t = (1-t)A + tL$. Les coefficients de A_t sont $\geq \frac{t}{n}$ (puisque les coefficients de A sont positifs) donc sont strictement positifs, et puisque $Aw = w$ et $Lw = w$, on aura $A_t w = w$. Ainsi, $A_t \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$ pour tout $t \in]0, 1]$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} A_t = A$, on obtient le résultat demandé :

$\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$ est dense dans \mathcal{S}_n .

- b) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$ qui tend vers A . Soit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k un vecteur de base de $\text{Ker}({}^tA_k - I_n)$ construit comme dans 4.g.

Par construction, on a $\|u_k\|_\infty \leq 1$ pour tout k , donc la suite (u_k) est bornée. \mathbb{C}^n étant de dimension finie, on peut en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(k)})$, vers un vecteur que nous noterons v .

Puisque ${}^tA_{\varphi(k)} \cdot u_{\varphi(k)} = u_{\varphi(k)}$, on obtient par passage à la limite ${}^tAv = v$, c'est-à-dire $v \in \text{Ker}({}^tA - I_n)$. Puisque les coordonnées de chaque vecteur $u_{\varphi(k)}$ sont positives, il en est de même de celles de v , et puisque la somme des coordonnées de chaque vecteur $u_{\varphi(k)}$ est égale à 1, il en est de même de celles de v (par simple passage à la limite). Il en résulte en particulier que v n'est pas nul, donc il s'agit bien d'un vecteur propre de tA pour la valeur propre 1.

- c) Il suffit de considérer la matrice unité I_n !

- d) Il suffit de considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $A \in \mathcal{S}_n$, et $A^2 = I_n$, donc A et la matrice d'une symétrie qui admet 1 et -1 comme valeurs propres.

- PARTIE IV -

IVA.

1. Avec des notations classiques on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

Les $a_{i,j}$ étant strictement positifs et les x_j étant positifs non tous nuls, on a bien :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Ax)_i > 0.$

2. La relation donnée implique que α est strictement positif, puis que la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ appartient à $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. 1 est donc valeur propre (simple) de $\frac{1}{\alpha}A$, donc α est valeur propre de A .

De plus, toujours d'après les résultats de la partie III., $\rho\left(\frac{1}{\alpha}A\right) = 1$ donc $\rho(A) = \alpha$.

3. a) De façon claire, puisque tout est positif :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_j = (Bx)_i.$$

Si $A, B \in \mathcal{P}_n, A \leq B \Rightarrow Ax \leq Bx$ pour tout x à coordonnées positives.

- b) Par une première récurrence sur k , il est facile de montrer que, si $A \in \mathcal{P}_n$ et si x est un vecteur à coordonnées positives, alors $A^k x$ est encore un vecteur à coordonnées positives.

Par une seconde récurrence sur k , on aura, si $A \leq B$ sont dans \mathcal{P}_n , $A^k x \leq B^k x$ pour tout vecteur x à coordonnées positives. En effet :

- C'est immédiat pour $k = 0$ et cela vient d'être fait dans la question précédente pour $k = 1$.

– Supposons donc $A^{k-1}x \leq B^{k-1}x$. En notant $y = A^{k-1}x$ et $z = B^{k-1}x$, on aura donc $0 \leq y_i \leq z_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Ay)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}z_j \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j}z_j = (Bz)_i$$

d'où $Ay \leq Bz$ soit $A^kx \leq B^kx$.

En appliquant alors la relation $A^kx \leq B^kx$ aux vecteurs $x = e_j$ de la base canonique, on obtient $(A^k)_{i,j} \leq (B^k)_{i,j}$ pour tous i, j , donc :

$$\boxed{\text{Si } A, B \in \mathcal{P}_n, A \leq B \Rightarrow A^k \leq B^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

c) On utilise ici les résultats de **II.B.1**. Soit γ un réel > 0 . Si la suite $((B/\gamma)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, puisque les coefficients de $(A/\gamma)^k$ sont positifs et majorés par ceux de $(B/\gamma)^k$ d'après la question précédente, la suite $((A/\gamma)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers 0. Donc, si $\gamma \in]\rho(B), +\infty[$ alors $\gamma \in]\rho(A), +\infty[$ c'est-à-dire $]\rho(B), +\infty[\subset]\rho(A), +\infty[$ et par suite :

$$\boxed{\text{Si } A, B \in \mathcal{P}_n, A \leq B \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(B).$$

4. La matrice B considérée dans l'énoncé est bien à coefficients strictement positifs, et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \alpha$. Or α est strictement positif, donc $\frac{1}{\alpha}B \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. D'après les résultats de **III.3.b**, $\rho\left(\frac{1}{\alpha}B\right) = 1$ donc $\rho(B) = \alpha$.

Mais, par définition de α , $b_{i,j} \leq a_{i,j}$ pour tous i, j donc $B \leq A$. D'après la question précédente, $\rho(B) \leq \rho(A)$ donc $\alpha \leq \rho(A)$.

5. On reprend exactement la même matrice B qu'à la question précédente, avec β à la place de α . Le début des calculs est le même, mais à la fin, puisque ici $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)$, on obtiendra $B \geq A$ d'où $\rho(B) \geq \rho(A)$ donc

$$\boxed{\beta \geq \rho(A).$$

Remarque :

On peut montrer que l'application qui à toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe le réel $\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est la norme subordonnée de l'endomorphisme canoniquement associé à A lorsque l'on munit \mathbb{C}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \|x\|_\infty$ et, lorsque x est un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A cela donne $|\lambda| \leq \|A\|$, d'où $\rho(A) \leq \|A\|$, ce qui est le résultat que l'on vient de démontrer dans un cas particulier (pour les matrices réelles positives seulement).

6. a) S est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls, elle est donc de déterminant non nul donc inversible.

Multiplier à gauche par une matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ revient à faire les opérations élémentaires sur les lignes $L_i \leftarrow \lambda_i L_i$, et multiplier à droite revient à faire les opérations sur les colonnes $C_j \leftarrow \lambda_j C_j$.

Ainsi, la matrice $S^{-1}AS$ a pour coefficient d'indice (i, j) : $a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$.

b) Si on note B la matrice $S^{-1}AS$, alors B est à coefficients strictement positifs et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

L'hypothèse de l'énoncé implique donc $\gamma \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} \leq \delta$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\gamma \leq \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n b_{i,j}$ et

$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n b_{i,j} \leq \delta$, et d'après les deux questions précédentes :

$$\boxed{\gamma \leq \rho(A) \leq \delta.$$

c) Par l'absurde, si l'on avait $(Ax)_i > \rho(A)x_i$ pour tout i , il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $(Ax)_i \geq (\rho(A) + \varepsilon)x_i$ pour tout i , soit $Ax \geq (\rho(A) + \varepsilon)x$, et on aurait $\rho(A) \geq \rho(A) + \varepsilon$ d'après la question précédente, ce qui est impossible.

7. Posons $y = Ax$. D'après **IV.A.1**, y a pour coordonnées des réels strictement positifs. Soit $z = y - \rho(A)x$. L'hypothèse de l'énoncé implique que z a pour coordonnées des réels positifs. Si z n'était pas nul, alors les coordonnées de $Az = Ay - \rho(A)y$ seraient des réels strictement positifs d'après **IV.A.1**, donc on aurait $(Ay)_i > \rho(A)y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

Ainsi $z = 0$ soit $y = \rho(A)x$ ou encore : $Ax = \rho(A)x$.

8. a) On a $Av = \alpha v$ donc pour tout i $\sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j = \alpha v_i$ d'où $|\alpha v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|v_j|$ soit $\rho(A)x_i \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$, c'est-à-dire $\rho(A)x \leq Ax$.

Les coordonnées de x sont des réels positifs et non tous nuls, ce qui permet quand même d'appliquer le résultat de la question précédente (le fait que *tous* les x_i soient strictement positifs n'avait pas servi...).

On a donc $Ax = \rho(A)x$ et :

x est bien un vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$.

b) x a pour coordonnées des réels positifs non tous nuls, donc d'après **IV.A.1** Ax a pour coordonnées des réels strictement positifs. Puisque $Ax = \rho(A)x$ et $\rho(A) > 0$, il en est de même de x .

c) Soit α une valeur propre de module $\rho(A)$ (il en existe forcément une), et soient v et x des vecteurs propres comme dans la question précédente, puis S la matrice associée à ce vecteur x comme dans la question **IV.A.6.a**, puis A' la matrice $S^{-1}AS$. On a déjà montré que $a'_{i,j} = a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$ pour tous i, j et que pour tout i , $\sum_{j=1}^n a'_{i,j} = \frac{(Ax)_i}{x_i} = \rho(A)$ (puisque $Ax = \rho(A)x$). La matrice $\frac{1}{\rho(A)}A'$ appartient donc à $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$ et d'après **II.4.d**, il existe $B \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\frac{1}{\rho(A)}A' = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} U \quad \text{avec de plus } \rho(B) < 1.$$

On aura alors puisque $A' = S^{-1}AS$:

$$A = SU^{-1} \begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & \rho(A)B \end{bmatrix} US^{-1} = V^{-1} \begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} V \quad \text{avec } B' = \rho(A)B \text{ et donc } \rho(B') < \rho(A)$$

ce qui est le résultat demandé (aux notations près).

Remarque importante pour la suite : cette écriture de la matrice A prouve que $\rho(A)$ est valeur propre simple de A , et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

IVB.

1. D'après **IV.A.8**, il existe un vecteur x dont les coordonnées sont des réels strictement positifs tel que $Ax = \rho(A)x$. En posant $y = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$, on aura bien y à coordonnées strictement positives, de somme 1 et $Ay = \rho(A)y$.

Un tel vecteur est unique puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle, et ne contient donc qu'un seul vecteur de cette forme.

On fait ensuite la même chose pour la matrice tA , qui est bien dans $\mathcal{P}_n^{>0}$.

2. Ici $\rho(A) = 1$ donc $A = V^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} V$ avec $\rho(B') < 1$. On démontre alors exactement comme en **III.4.e** que la suite (A^k) converge vers L , matrice de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}\{y\}$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$. Les vecteurs colonnes de L sont donc proportionnels à y donc L est de la forme

$$L = \begin{pmatrix} u_1 y_1 & u_2 y_1 & \dots & u_n y_1 \\ u_1 y_2 & u_2 y_2 & \dots & u_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1 y_n & u_2 y_n & \dots & u_n y_n \end{pmatrix}$$

La matrice tL est encore une matrice de rang 1 ; ses vecteurs colonnes sont colinéaires au vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ et appartiennent à l'image de tL , qui est engendrée par le vecteur z de la question précédente (puisque ${}^tAz = z \Rightarrow {}^tA^kz = z$ pour tout k , d'où ${}^tLz = z$ par passage à la limite). Le vecteur u est donc colinéaire à z , et finalement il existe un réel a tel que

$$L = a \begin{pmatrix} z_1y_1 & z_2y_1 & \dots & z_ny_1 \\ z_1y_2 & z_2y_2 & \dots & z_ny_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1y_n & z_2y_n & \dots & z_ny_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, la condition $Ly = y$ donne $a \left(\sum_{i=1}^n y_i z_i \right) = 1$. Il y a donc une petite erreur d'énoncé :

La matrice L est la matrice $a(y_i z_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $a = \frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i z_i}$.

3. Soit B la matrice $B = \frac{1}{\rho(A)}A$. La matrice B vérifie les hypothèses de la question précédente, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = L$. D'après les questions précédentes, les coefficients $\ell_{i,j}$ de L sont des réels strictement positifs.

On aura donc : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^{(k)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \rho(A)^k \ell_{i,j}$ et par conséquent :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(k)} = +\infty.$$

- PARTIE V -

1. La trace de A est la somme de ces éléments diagonaux, qui sont strictement positifs puisque $A \in \mathcal{P}_3^{>0}$, donc $\text{tr}A > 0$.

On calcule : $(A^2)_{i,i} = \sum_{j=1}^3 a_{i,j} a_{j,i} = a_{i,i}^2 + \dots$ donc $\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^3 (A^2)_{i,i} = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + \dots$ où les \dots sont des termes strictement positifs puisque $A \in \mathcal{P}_3^{>0}$, d'où l'inégalité demandée.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}|^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2)$ soit $(\text{tr}A)^2 \leq 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) < 3 \text{tr}(A^2)$.

2. La matrice A est trigonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T où figurent ses valeurs propres sur la diagonale. Don $\text{tr}A = \text{tr}T = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Ensuite, A^2 est semblable à T^2 donc $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(T^2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

3. a) D'après les relations précédentes :

$$\begin{aligned} 3 \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2 &= 3(1 + 2r^2 \cos(2t)) - (1 + 2r \cos t)^2 \\ &= 2 + 6r^2(2 \cos^2 t - 1) - 4r^2 \cos^2 t - 4r \cos t \\ &= 2 + 8r^2 \cos^2 t - 4r \cos t - 6r^2 \end{aligned}$$

et d'autre part

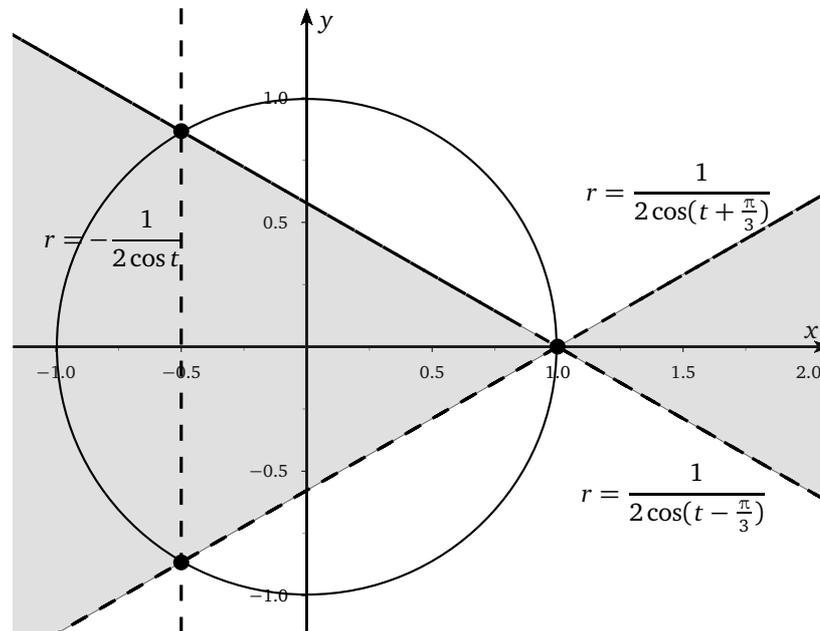
$$\begin{aligned} 2(1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3})) &= 2(1 - r \cos t + r\sqrt{3} \sin t)(1 - r \cos t - r\sqrt{3} \sin t) \\ &= 2[(1 - r \cos t)^2 - 3r^2 \sin^2 t] \\ &= 2[1 + r^2 \cos^2 t - 2r \cos t - 3r^2 + 3r^2 \cos^2 t] \end{aligned}$$

et en comparant les deux expressions, on a bien l'égalité demandée.

b) L'inégalité $3 \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2 > 0$ se traduit par $(1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3})) > 0$. Il s'agit de la portion du plan délimitée par les droites de représentation paramétrique polaire $r = \frac{1}{2 \cos(t + \frac{\pi}{3})}$ et

$r = \frac{1}{2 \cos(t - \frac{\pi}{3})}$, représentée en gris sur la figure ci-dessous. D'autre part, l'inégalité $\text{tr}(A) > 0$ se traduit par $2r \cos t + 1 > 0$ soit simplement $\Re(\alpha_2) > -\frac{1}{2}$. Enfin, la condition $r \leq 1$ implique que α_2 se trouve à l'intérieur du cercle unité.

En conclusion, α_2 est à l'intérieur du triangle dont les sommets sont les points d'affixes 1, 1 et j^2 (racines cubiques de 1).



4. Posons $z = re^{it}$. Alors $1 + 2r \cos t = 1 + z + \bar{z}$.

On a aussi $-2r \cos(t - \frac{\pi}{3}) = 2r \cos(t + \frac{2\pi}{3}) = 2\Re(jz) = jz + j^2\bar{z}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$ et

$-2r \cos(t + \frac{\pi}{3}) = 2r \cos(t - \frac{2\pi}{3}) = 2\Re(j^2z) = j^2z + j\bar{z}$.

La matrice de l'énoncé peut s'écrire $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, avec $a = \frac{1}{3}(1 + z + \bar{z})$, $b = \frac{1}{3}(1 + j^2z + j\bar{z})$ et $c = \frac{1}{3}(1 + jz + j^2\bar{z})$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_A = \begin{vmatrix} a-X & b & c \\ c & a-X & b \\ b & c & a-X \end{vmatrix}$.

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ montre que ce polynôme est divisible par $a + b + c - X$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + jC_2 + j^2C_3$ montre qu'il est divisible par $a + bj + cj^2 - X$ et enfin l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + j^2C_2 + jC_3$ montre qu'il est divisible par $a + bj^2 + cj - X$.

On a donc $\chi_A = (a + b + c - X)(a + bj + cj^2 - X)(a + bj^2 + cj - X)$ et les valeurs propres de A sont $a + b + c = 1$, $a + bj + cj^2 = z$ et $a + bj^2 + cj = \bar{z}$ compte tenu des calculs précédents et de la relation $1 + j + j^2 = 0$, c'est-à-dire α_1, α_2 et α_3 .

Enfin, l'appartenance de α_2 à l'intérieur (strict) du triangle précédent implique que les coefficients a, b, c sont strictement positifs.

Les valeurs propres de A sont bien α_1, α_2 et α_3 , et A appartient à $\mathcal{P}_3^{>0}$

5. Notons \mathcal{S}_1 l'ensemble des triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de \mathcal{S} tels que $\alpha_1 = 1$. L'appartenance de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ à \mathcal{S} à S (qui implique forcément $\alpha_1 > 0$) revient à celle de $(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1})$ à \mathcal{S}_1 .

Ainsi \mathcal{S} est l'ensemble des triplets (r, ru, rv) où $r > 0$ et (u, v) vérifie l'une des deux conditions :

- u et v sont deux complexes conjugués situés à l'intérieur (strict) du triangle équilatéral de sommets 1, j et j^2 (cela correspond aux cas envisagés dans les questions 3 et 4).
- u et v sont réels : alors ils appartiennent à $] -1, 1[$ et $u + v > -1$.

- FIN -