Université de Cergy-Pontoise
Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

2011-2012

Rappels de cours

Jean Delcourt

10 janvier 2014

1 Espaces vectoriels

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de C
5.1 Espaces vectoriels et algèbres
Définitions. Applications linéaires. Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$. Algèbre $\mathscr{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$.
Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.
Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.
Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $\mathscr{L}(E,F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.
Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.
5.2 Espaces vectoriels de dimension finie
Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant les dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des automorphismes.

1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1 Définitions

Soit K un corps commutatif. D'après le programme, ce doit être un sous-corps de **C**. Toutes les généralités restent vraies pour un corps (commutatif) quelconque.

Définition 1 $(E,+,.)$ *est un K-espace vectoriel si c'est un groupe commutatif pour l'addition et si . représente une opération externe telle que :*

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu).x &= \lambda.x+\mu.x\\ \lambda.(\mu.x) &= (\lambda\mu).x\\ \lambda.(x+y) &= \lambda.x+\mu.y\\ 1.x &= x\end{aligned}$$

pour tous scalaires λ, μ et tous vecteurs x et y.
$(A,+,.,\times)$ *est une K-algèbre si c'est un K espace vectoriel, si $(A,+,\times)$ est un anneau et si de plus*

$$(\lambda.x)\times y = x\times(\lambda.y) \qquad = \lambda.(x\times y)$$

On notera 0_E ou 0 le vecteur nul (neutre pour l'addition) et 1_A ou 1 le neutre pour la multiplication dans une algèbre. Il existe deux types d'exemples : dans le domaine de l'algèbre, dans celui de l'analyse :

Exemple 2 *Les ensembles K^n, $\mathscr{A}(X,K)$ (ensemble des applications d'un ensemble X à valeurs dans K), $\mathscr{M}_n(K)$, $K[X_1,\dots,X_n]$ sont des espaces vectoriels. Les trois derniers sont également des K-algèbres.*

Une façon de construire des espaces vectoriels est de faire des produits :

Proposition 3 *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels, le produit cartésien $E \times F$ est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel.*

Il suffit de poser :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \qquad \text{et} \qquad \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$$

1.2 Sous-espaces vectoriels

On définit de façon naturelle les sous-espaces vectoriels (resp. sous-algèbres). Ainsi, beaucoup d'ensembles de fonctions en analyse sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(X, K)$. Rappelons que, pour que B soit un sous-anneau de A, il faut que $1_B = 1_A$. Ainsi, l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre $\mathscr{M}_2(K)$.

Proposition 4 *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels, l'ensemble*

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i$$

est un sous-espace vectoriel.

La démonstration est immédiate. Une conséquence en est qu'il existe toujours un plus petit sous-espace vectoriel qui contient un sous-ensemble S de E, c'est l'intersection des sous-espaces vectoriel de E qui contient S. On le note $\mathrm{vect}(S)$, parfois plus rapidement $\langle S\rangle$.

Exo. 5 *Vérifier cette affirmation...*

Proposition 6 *Le sous-espace engendré par S est l'ensemble des combinaisons linéaires formées avec des familles de vecteurs pris dans S.*

La démonstration n'est pas difficile, mais c'est un bon exercice de la rédiger. Rappelons par ailleurs que si $F = \mathrm{vect}(S)$, on dit que S est une **partie génératrice** de E. Remarquons que si $S = \{x\}$, vecteur non nul, alors

$$\mathrm{vect}(x) = \{y \in E \mid \exists \lambda \in K,\ y = \lambda x\} = Kx$$

On dit aussi que c'est la **droite engendrée** par x.

Remarque 7 *Prenons un peu de recul : ce qu'on vient de décrire se transcrit dans la structure de groupe (quel est alors la description du sous-groupe engendré par S ?), dans la structure d'idéal d'un anneau (même question), de sous-espace affine (même question), d'enveloppe convexe (même question)...*

1.3 Sommes de sous-espaces

La réunion d'une famille de sous-espaces vectoriels n'est pas (en général) un sous-espace vectoriel, d'où la définition :

Définition 8 *Le sous-espace engendré par la réunion d'une famille non vide $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces est la **somme** de ces sous-espaces.*

On la note $\sum_{i\in I} F_i$ ou $F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ dans le cas d'une famille finie. Le nom choisi se justifie par :

Proposition 9 *La somme de sous-espaces vectoriels est l'ensemble des sommes (finies) de vecteurs pris dans les sous-espaces.*

Si on veut une formulation plus précise, x est dans la somme s'il existe une partie J finie de I et des vecteurs $x_j \in F_j$ tels que

$$x = \sum_{j \in J} x_j$$

Il est parfois avantageux de le formuler ainsi : x est dans la somme s'il existe des vecteurs $x_i \in F_i$, presque tous nuls tels que

$$x = \sum_{i \in I} x_i$$

La démonstration est immédiate, et une notion importante s'impose alors :

Définition 10 *On dit qu'une somme $\sum_{i \in I} F_i$ est* ***directe*** *si dans toute écriture comme ci-dessus, il y a unicité des x_i*

On écrit alors $\bigoplus_{i \in I} F_i$ cette somme directe, et on dit parfois que, quand des sous-espaces sont en somme directe, ils sont **indépendants**.

Un premier critère très utile :

Proposition 11 *La somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe si et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ presque toute nulle et où pour tout i, on a $x_i \in F_i$:*

$$\sum_{i \in I} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, x_i = 0$$

Démonstration. (esquissée) Dans un sens,, c'est l'unicité de l'écriture de 0. Dans l'autre, toute égalité

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} y_i$$

s'écrit aussi

$$\sum_{i \in I} (x_i - y_i) = 0$$

■

C'est très général : pour anticiper, la linéarité permet de se ramener au seul cas du vecteur nul. Voir le lien entre noyau et injectivité d'une application linéaire.

Il y a également un critère portant sur les F_i qui permet de dire que leur somme est directe. Nous ne le formulerons que dans le cas d'une famille finie : d'ailleurs, le programme de l'agrégation interne stipule précisément qu'on doit se contenter des sommes finis.

Théorème 12 *Des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots F_k$ sont en somme directe si et seulement si :*

$$\forall i \in 1..k,\ F_i \cap \sum_{j=1, j \neq i}^{j=k} F_j = \{0\}$$

Démonstration. Supposons que la somme soit directe. Si $x \in F_1 \cap \sum_{j=1, j \neq 1}^{j=k} F_j$, alors on a une égalité de la forme

$$x_1 = x_2 + x_3 + \ldots + x_k \iff -x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$$

et tous les x_i sont nuls, donc $x = 0$. Supposons les propriétés d'intersection réalisées, et soit

$$x_1 + \ldots + x_k = 0$$

où les $x_i \in F_i$ pour tout i. S'il existe un indice ℓ tel que $x_\ell \neq 0$, alors l'égalité

$$x_\ell = -\sum_{i=1, i\neq \ell}^{i=k} x_i$$

donnerait un vecteur non nul dans l'intersection $F_\ell \cap \sum_{i=1,i\neq\ell}^{i=k} F_j$ ■

La proposition se simplifie dans le cas où l'on n'a que deux sous-espaces car elle s'écrit alors : deux sous-espaces F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Une dernière définition :

Définition 13 *Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de E tels que*

$$E = E_1 \oplus E_2$$

*on dit que ces sous-espaces sont **supplémentaires**.*

Nous verrons plus loin que **tout sous-espace admet un supplémentaire**.

Exemples, dans l'espace de la géométrie, $\mathbb{R}^3$, un plan et une droite non incluse dans ce plan sont supplémentaires. L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Nous retrouverons les sommes directes et sous-espaces supplémentaires lors de l'étude des projecteurs.

1.4 Applications linéaires

Définition 14 *Une application $f : E \to F$ entre deux K-espaces vectoriel est dite linéaire si :*

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

*Si l'ensemble d'arrivée est le corps K, on parle de **forme linéaire**. Un morphisme d'algèbre est une application linéaire qui est compatible avec le produit et qui transporte le* 1.

Il y a un lien entre applications linéaires et sous-espaces vectoriels. Ainsi, on vérifie facilement qu'une application linéaire transforme tout sous-espace vectoriel de E en un sous-espace vectoriel de F et que l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E. Deux cas particuliers importants :

Définition 15 *On appelle **image** de f le sous-espace vectoriel de F égal à $f(E)$. On le note aussi* $\mathrm{Im}(f)$. *On appelle **noyau** de f le sous-espace de E qui est l'image réciproque de* $\{0_F\}$. *On le note* $\mathrm{Ker}(f)$.

Et on a la proposition :

Proposition 16 *L'application linéaire f de E dans F est surjective ssi* $\mathrm{Im}(f) = F$, *elle est injective ssi* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Démonstration laissée au lecteur, de même que les démonstrations des propositions qui suivent.

Proposition 17

1. *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. On le note $\mathscr{L}(E,F)$.*
2. *L'ensemble des applications linéaires de E dans E (**endomorphismes**) est naturellement muni d'une structure d'algèbre. On le note $\mathscr{L}(E)$. L'élément neutre pour $\circ$ est l'application identique notée id.*

3. *L'application réciproque d'une application linéaire bijective (**isomorphisme**) est elle-même une application linéaire. L'ensemble des endomorphismes bijectifs (**automorphismes**) est un groupe (pour la loi $\circ$), noté* $\mathbf{GL}(E)$ *et appelé **groupe linéaire** de E.*

Un théorème important sur le plan théorique, et qui donnera, plus tard, le théorème du rang.

Théorème 18 *Soit f une application linéaire de E dans F. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est isomorphe à tout supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration. On sait par ailleurs que $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire. Notons donc K un s.e.v. de E tel que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus K$. Définissons $g : K \to \mathrm{Im}\, f$ comme la restriction de f à K, pour l'ensemble de départ, et à $\mathrm{Im}(f)$, pour l'ensemble d'arrivée. L'application g est linéaire. Elle est injective car son noyau est :

$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap K = \{0\}$$

Elle est surjective. Soit en effet $y = f(x)$ un élément de $\mathrm{Im}(f)$. En écrivant $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $\mathrm{Ker}\, f \oplus K$, on voit que $y = f(x) = f(x_2) = g(x_2)$. ∎

Une remarque : il y a un lien très fort avec ce qu'on appelle le théorème d'isomorphisme en théorie des groupes ou théorie des anneaux...

1.5 Projecteurs et Symétries

Ce sont des cas particuliers très importants d'endomorphismes.

Définition 19 *Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **projecteur** (ou projection) si $p \circ p = p$.*
*Un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **symétrie** (ou involution) si $s \circ s = id_E$.*

Á toute projection est associée une décomposition en deux sous-espaces supplémentaires :

Proposition 20 *Si p est un projecteur, $E_1 = \mathrm{Ker}\, p$ et $E_2 = \mathrm{Im}\, p$ sont deux sous-espaces supplémentaires, et p est l'application définie par :*
Si dans la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ on a $x = x_1 + x_2$, alors $p(x) = x_1$. On l'appelle projection sur E_1 suivant (ou parallèlement à) E_2
Réciproquement, toute application définie comme ci-dessus est un projecteur.

On peut remarquer également que $E_2 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. La démonstration de la proposition est sans difficulté. Donnons quand même le point de départ : $x = p(x) + (x - p(x))$, égalité qui ne peut manquer d'être vraie...

La situation est tout à fait analogue pour les symétries.

Proposition 21 *Si s est une symétrie, $E_1 = \mathrm{Ker}(s - id_E$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + id_E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires, et s est l'application définie par :*
Si dans la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ on a $x = x_1 + x_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$. On l'appelle symétrie par rapport à E_1 suivant E_2.
Réciproquement, toute application définie comme ci-dessus est une symétrie.

La démonstration peut se faire en remarquant que s est une involution si et seulement si $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ est un projecteur.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

La question de la dimension finie n'est pas si simple. En particulier, le fait que l'ensemble des scalaires soit un corps est essentiel. Commençons par des définitions.

2.1 Bases

Définition 22 *Une **famille** de vecteurs est une suite $(x_i)_{i\in I}$ indicée de vecteurs. Souvent I sera de la forme $I = 1..k$. Cette famille de vecteurs est **génératrice** si $E = \mathrm{vect}((x_i)_{i\in I})$.*
*Cette famille de vecteurs est **libre** si les sous-espaces $\mathrm{vect}(x_i) = Kx_i$ sont indépendants. Autrement dit si*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \text{ scalaires presque tous nuls}, \sum_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0$$

*Cette famille de vecteurs est **liée** si elle n'est pas libre, autrement dit s'il existe une égalité*

$$\sum_i \lambda_i x_i = 0$$

telle que les scalaires ne soient pas tous nuls. Une telle égalité s'appelle une relation de liaison.
*Cette famille de vecteurs est une **base** si elle est génératrice et libre; autrement dit, la somme des Kx_i est directe et est égale à l'espace tout entier, autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme de vecteurs de la base. Les coefficients correspondants s'appellent les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$.*

Quelques propriétés immédiates concernent les sur-familles et les sous-familles, comme par exemple « toute sur-famille d'une famille liée est liée ». De même, les exemples de bases sont bien connus, comme celui des bases canoniques de K^n (la base canonique est formée des e_i dont la seule coordonnée non nulle est celle d'indice i qui vaut 1). Un exemple de base infinie (pratiquement le seul...), la base canonique de $K[X]$, qui est formée des monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

2.2 Le lemme fondamental

Le résultat un peu « technique » qui fait tout fonctionner s'énonce ainsi.

Lemme 23 *Soit $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ une famille de vecteurs. Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{vect}(G)$ est liée.*

Démonstration. Il y a plusieurs démonstrations. Donnons en deux :

– La première utilise des résultats élémentaires de la méthode du pivot.
– La seconde est plus classique, elle procède par récurrence.

Commençons par la première méthode (Knapp et autres ?). On utilise le résultat (montré en annexe) : tout système homogène de n équations à $n+1$ inconnues admet une solution non triviale (c'est-à-dire non identiquement nulle). Soient donc $n+1$ vecteurs y_1, y_2,...,y_{n+1}. On suppose qu'ils sont dans $\mathrm{vect}(G)$ donc qu'il existe des scalaires $(a_{ij}$ tels que :

$$\forall i \in 1..n+1, \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j$$

Soit alors $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$ des scalaires :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_i g_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} b_i \right) g_j\end{aligned}$$

Mais le système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} b_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} b_i = 0 \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} b_i = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$ admet une solution non triviale : les vecteurs (y_i) sont liés.

Passons à la seconde démonstration : on procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, on a donc

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} g_1 \\ y_2 = a_{21} g_1 \end{cases}$$

et la famille (y_1, y_2) est liée, soit parce qu'un des deux vecteurs est nul, soit parce que $a_{21} y_2 - a_{11} y_2 = 0$ est une relation de liaison. Supposons que la propriété soit vraie pour $n-1$ et partons comme ci-dessus de :

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} g_j \\ y_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} g_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} g_j \end{cases}$$

1. Soit tous les (a_{i1}) sont nuls : les vecteurs $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont exprimés en fonction de $n-1$ vecteurs $(g_2, \ldots, g_n)$ et forment une famille liée (hypothèse de récurrence), c'est aussi le cas de la sur-famille $(y_1, y_2, \ldots, y_{n=1})$.
2. Soit un de ces coefficients, par exemple (quitte à renuméroter) a_{11}, est non nul. Alors les n vecteurs $y_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} y_1$ pour $i \in 2..n+1$ s'expriment en fonction des $n-1$ vecteurs $(g_2, \ldots, g_n)$ et forment une famille liée (hypothèse de récurrence). Une relation de liaison entre ces vecteurs donne bien (le vérifier...) une relation de liaison entre y_1, ..., y_{n+1}.

■

Cette seconde démonstration a été détaillée pour que l'on observe bien qu'elle mime une étape de la méthode du pivot.

Remarque 24 *Sur la terminologie : nous avons choisi de parler systématiquement de* ***famille*** *de vecteurs, comme désignant une suite indicée (souvent finie) de vecteurs. Cela a pour conséquence que l'ordre importe (et c'est notamment important pour les bases). On emploie également dans le même sens l'expression* ***système*** *de vecteurs.*
Il importe de distinguer cela des expressions comme ***partie génératrice****, partie libre, etc... qui désignent des sous-ensembles de vecteurs. On peut bien sûr réécrire nos énoncés en ces termes, mais il y aura des précautions à prendre : un système de vecteurs peut être lié sans que la partie correspondante soit liée (cf. deux fois le même vecteur). À un même partie basique correspondent plusieurs bases... Voir Warusfel pour une distinction.*

2.3 La dimension finie

Commençons par

Définition 25 *Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.*

Attention... ce n'est pas (encore) la définition de ce qu'un appelle la dimension... Une remarque également : si E est de dimension finie, alors de toute famille génératrice on peut extraire une famille génératrice finie (exercice facile). Nous pouvons maintenant énoncer un théorème général qui regroupe les propriétés essentielles des familles de vecteurs en dimentsion finie.

Théorème 26 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

- *i* *Si E est non réduit au vecteur nul, il admet une base.*
- *ii* *Toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de E et noté* $\dim E$.
- *iii* *Toute partie libre a au plus* $\dim E$ *éléments, et si elle en a exactement* $\dim E$*, c'est une base.*
- *iv* *Toute partie génératrice a au moins* $\dim E$ *éléments, et si elle en a exactement* $\dim E$*, c'est une base.*
- *v* *Toute partie libre a au plus* $\dim E$ *éléments, et si elle en a exactement* $\dim E$*, c'est une base.*

Démonstration.

- i Si E est réduit au vecteur nul, il n'a pas de partie libre (le vecteur nul est lié) donc pas de base. Sa dimension est 0. Sinon, il existe une partie libre finie $\mathscr{L}$. Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice finie. Alors la réunion de $\mathscr{L}$ et de $\mathscr{G}$ est génératrice. Dans cette réunion, il existe une partie libre maximale $\mathscr{B}$ contenant $\mathscr{L}$, et cette partie maximale est une base : en effet, tout élément g de $\mathscr{G}$ est combinaison des éléments de $\mathscr{B}$. C'est clair s'il est dans $\mathscr{B}$. Sinon, on raisonne par l'absurde en disant que si ce n'était pas le cas, $\mathscr{B} \cup \{g\}$ serait libre maximale.
- ii Ici nous appliquons le lemme fondamental : si $\mathscr{B}$ est une base, toute partie libre a moins d'élément que $\mathscr{B}$ (puisque toute partie ayant plus d'éléments que $\mathscr{B}$ est liée). Toute base $\mathscr{B}'$ vérifie donc $\operatorname{card}(\mathscr{B}') \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{B})$. En échangeant les rôles, on voit que toutes les bases ont le même cardinal.
- iii On vient de justifier qu'une partie libre a moins de $\dim E$ éléments. On sait aussi que si toute partie libre peut être complétée en une base : donc, si elle a $\dim E$ éléments, on ne peut la compléter qu'en n'ajoutant...aucun vecteur.
- iv D'une partie génératrice $\mathscr{G}$ on peut extraire une base (il suffit de compléter une partie libre formée d'un vecteur non nul de $\mathscr{G}$). Il en résulte que toute partie génératrice est de cardinal supérieur à la dimension.

■

La première partie de la démonstration peut être énoncée sous forme d'un théorème fort utile :

Théorème 27 (de la base incomplète) *Toute partie libre d'un espace vectoriel E peut être complétée en une base de E. Les vecteurs ajoutés peuvent être pris dans une partie génératrice quelconque.*

Le lecteur attentif remarquera que l'on n'a pas supposé que E est de dimension finie... C'est qu'en effet le théorème reste vrai en toute hypothèse, et a donc pour conséquence que tout espace vectoriel admet une base (de cardinal éventuellement infini.)

Donnons enfin deux derniers résultats théoriques.

Théorème 28 *Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors* $\dim F \leqslant \dim E$ *et il n'y a égalité que si $F = E$.*

Démonstration. Une partie libre de F est libre de E, et elle peut être complétée au moyen d'une base de E (finie) en une partie libre maximale (finie) donc $\dim F \leqslant \dim E$. ■

Théorème 29 *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors il admet un supplémentaire.*

On utilise le théorème de la base incomplète.

Remarque 30 *Attention certains énoncés ou bout de démonstrations supposent que E n'est pas réduit à* 0. *En dimension infinie, la difficulté provient de l'existence d'une famille libre maximale...On n'échappe pas à l'axiome du choix ou au théorème de Zorn. Voir Ramis-Warusfel p.206 L1.*

2.4 Dimension finie et sommes directes

En dimension finie, il y a de nouvelles façons de caractériser les sommes directes (ou sous-espaces supplémentaires).

Proposition 31 *Soit $S = F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ une somme de sous-espaces de E. Cette somme est directe si et seulement si il existe une base de S qui est la réunion disjointe de bases des F_i.*

Démonstration. La démonstration repose uniquement sur l'unicité de l'écriture tant dans une base que dans une somme directe : si la somme est directe, alors en appelant $\mathscr{B}_i$ une base de F_i, la réunion des $\mathscr{B}$ est bien une base de S puisque tout vecteur de S s'écrit de façon unique $x = \sum x_i$ où $x_i \in F_i$ et... Traiter de même la réciproque. ∎

Un corollaire très utile en pratique :

Corollaire 32 *Soit $S = F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ une somme de sous-espaces de E. Alors la somme est directe si et seulement si*

$$\dim S = \sum \dim F_i$$

Démonstration. Pour la partie directe, c'est une application directe de la proposition précédente. Réciproquement, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i pour tout i et soit U la réunion des $\mathscr{B}$. Alors

$$\operatorname{card} U \leqslant \sum \dim F_i = \dim S$$

Mais U est une partie génératrice de S, donc $\operatorname{card} U \geqslant \dim E$. Ainsi $\operatorname{card} U = \sum_i \dim F_i$ et U est une réunion disjointe. De plus est une partie génératrice de S qui a $\dim S$ éléments, c'est une base de S. ∎

Enfin, un théorème sur le produit d'espaces vectoriels :

Théorème 33 *Soit $G = E \times F$ le produit de deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors G est de dimension finie et*

$$\dim G = \dim F + \dim G$$

Démonstration. Il suffit d'observer que si (e_i) est une base de E et (f_j) est une base de F, alors $\mathscr{B} = \bigcup_i (e_i, 0) \cup \bigcup_j (0, f_j)$ est une base de $E \times F$. ∎

2.5 Applications linéaires en dimension finie

Une remarque fondamentale : par isomorphisme, la dimension d'un espace vectoriel est conservée. On peut le déduire d'un résultat général :

Théorème 34 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est déterminée de façon unique pa l'image d'une base de E.*
De plus, l'image d'une partie génératrice de E est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et, si f est injective, l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F. Enfin, f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

La démonstration est laissée au lecteur. Remarquons que dans le dernier énoncé on peut aussi comprendre « une base » comme « toute base »... Il résulte aussi de cet énoncé que tous les sous-espaces de dimension finie n sont isomorphes entre eux et sont isomorphes à K^n.

Venons-en au célèbre théorème du rang.

Théorème 35 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors* $\operatorname{Im} f$ *est de dimension finie et*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Le nombre $\dim \operatorname{Im} f$ *est noté* $\operatorname{rg} f$ *et s'appelle **rang** de f*

Démonstration. On rappelle que d'après le théorème 18, $\operatorname{Im} f$ est isomorphe à un supplémentaire (dans E) de $\operatorname{Ker} f$; comme la dimension d'une somme directe est la somme des dimension, le théorème en résulte immédiatement. ■

Quelques applications :

Corollaire 36 (Endomorphismes en dimension finie) *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors*
f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.

Cela fonctionne aussi si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si E et F ont la même dimension finie.

Théorème 37 (relation de Grassman) *Si F et G sont deux sous-espace vectoriels de E de dimension finie :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration. Soit $\phi : F \times G \to E$ l'application définie par $\phi((f, g)) = f + g$. Son image est $F + G$ et son noyau est l'ensemble des couples $f, -f)$ où $f \in F \cap G$. On applique alors le théorème du rang. ■

2 Matrices et systèmes

5.3 Matrices
Espaces $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K. Isomorphisme canonique avec $\mathscr{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n,K)$.
Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Taille maximale des sous-matrices carrées inversibles d'une matrice donnée. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.
Matrice d'un endomorphisme d'un espace muni d'une base, matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
5.4 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires Systèmes d'équations linéaires, matrice associée. Systèmes de Cramer. Applications à des problèmes de géométrie.
Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
Application des opérations élémentaires à la résolution de systèmes linéaires, au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n,K)$ et $SL(n,K)$.

1 L'algèbre des matrices

1.1 Définition

Définition 38 *Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle matrice de type (n,p) une famille de scalaires indexée par $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}$. Les éléments d'une matrice A sont rangés dans un tableau de n lignes et p colonnes de la façon suivante*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

et le premier indice s'appelle indice de ligne, le second indice de colonne.

L'ensemble des matrices de même type à coefficients dans un corps K est noté $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ et si $n=p$, on abrège en $\mathscr{M}_n(K)$ (matrices carrées). Les matrices de type $(1,p)$ sont appelées matrices lignes, les matrices de type $(n,1)$ sont appelées matrices colonnes. L'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}$ des matrices colonnes sera identifié avec l'espace vectoriel K^n.

1.2 Matrices extraites, blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Si I et J sont respectivement des sous-ensembles non vides de $\{1,\ldots,n\}$ et de $\{1,\ldots,p\}$, on appelle matrice-extraite la matrice notée $A_{I,J}$ dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ où $i \in I$ et $j \in J$, l'ordre étant conservé. Pour être plus précis, il conviendrait de renuméroter... Si les ensembles I et J sont formés d'entiers consécutifs, on parle de blocs, et on peut de façon réciproque définir une matrice formés de blocs.

Un cas fréquent est celui où $I = \{i\}$ et $J = \{1,\ldots,p\}$, le bloc se nomme ligne d'indice i de la matrice et sera souvent noté L_i. On définira également les colonnes C_j de la matrice A et on utilisera les deux écritures en blocs :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$$

1.3 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble des matrices d'un type donné est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel : c'est la structure produit. Ainsi la somme de deux matrices A et B sera donnée par

$$A + B = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

et la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, qui est de dimension np, est formée des matrices élémentaires : la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui ligne i et colonne j qui est égal à 1 ; (la notation est imparfaite, il faudrait préciser que c'est une matrice de type (n,p).

Exo. 39 *Vérifier que si $E_{ij} = (e_{k,l})$ alors*

$$e_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$$

Dans le cas des matrices colonnes, la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ est la même que celle de K^n et les matrices $(E_{i,1})$ sont la base canonique de K^n.

1.4 Produit de matrices

Ce n'est plus une opération « interne » :

Définition 40 *On définit le produit AB de deux matrices A et B si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$. Si (c_{ij}) sont les coefficients de $C = AB$:*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ce calcul peut se résumer en disant que l'on multiplie un élément de la ligne i de la matrice A par l'élément correspondant de la colonne j de la matrice B et en additionnant les produits. Avec cette définition, le produit d'une ligne par une colonne (de même longueur) est un scalaire. Si A est considérée comme matrice bloc de lignes et B comme matrice-bloc de colonnes, on aura :

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = (L_i C_j)$$

Dans le paragraphe suivant, nous verrons que ce produit de matrices a les propriétés attendues d'un produit.

Exo. 41

Montrer que

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$$

Calculer $E_{ij}A$, AE_{kl}, $E_{ij}AE_{kl}$

(On suppose que les matrices sont telles que les produits existent).

1.5 Matrices et applications linéaires

On considère les espaces vectoriels K^p et K^n. Nous allons montrer qu'il y a un isomorphisme d'espace vectoriel canonique entre $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $\mathscr{L}(K^p, K^n)$. Rappelons que nous identifions K^n et $\mathscr{M}_{n,1}(K)$. Notons (e_i) la base canonique de K^p.

Proposition 42 *Soit* $f \in \mathscr{L}(K^p, K^n)$. *Si on note :*

$$C_j = f(e_j), \qquad et \qquad A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{pmatrix}$$

alors l'application M *qui à* f *associe* $M(f) = A$ *est un isomorphisme (canonique) d'espaces vectoriels.*

Démonstration. L'application est bijective : cela résulte du théorème 34. Pour le reste, cela résulte de

$$(f + \lambda g)(e_j) = f(e_j) + \lambda g(e_j)$$

et de la définition de la structure d'espace vectoriel dans l'ensemble des matrices. ■ L'intérêt de l'écriture matricielle des applications linéaires repose sur la proposition suivante :

Proposition 43 *Soit* A *représentant une application linéaire de* K^p *dans* K^n, X *un élément de* K^p *et* Y *son image par l'application linéaire, on a :*

$$Y = AX$$

Démonstration. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $X = \sum_j x_j e_j$ et $Y = f(X) = f(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j f(e_j) = \sum_j C_j x_j$. Si donc y_i est la i-ème coordonnée de Y, on a $y_i = \sum_j a_{i,j} x_j$, ce qui signifie bien $Y = AX$. ■ On a ainsi une interprétation du produit d'une matrice par une colonne. Voici maintenant une interprétation du produit de deux matrices quelconques :

Théorème 44 *Soit* $f \in \mathscr{L}(K^p, K^n)$ *et* $g \in \mathscr{L}(K^n, K^q)$ *alors*

$$M(g \circ f) = M(g)M(f)$$

Il suffit d'appliquer ce qui précède. Muni de ces interprétations, on peut transporter les propriétés des endomorphismes aux matrices. En particulier

Proposition 45 – *Le produit des matrices est associatif.*
- *L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)$ est une algèbre, d'élément neutre pour le produit la matrice de l'identité, notée I_n. Elle est isomorphe à $\mathcal{L}(K^n)$.*
- *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ est un groupe pour le produit. Il est noté $GL(n,K)$ et il est isomorphe à $GL(K^n)$.*

Rappelons que la matrice I_n est la matrices dont les coefficients sont les $\delta_{i,j}$, sa diagonale principale est formée de 1, les autres coefficients sont nuls. On peut également, avec cette identification donner un sens à la notion de noyau et d'image d'une matrice :

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in K^p \mid AX = 0\} \qquad \operatorname{Im} A = \{Y \in K^n \mid \exists X \in K^p,\ Y = AX\}$$

Remarque 46 *Pour le moment, une matrice inversible est la matrice d'un automorphisme de K^n. C'est donc une matrice carrée A telle qu'il existe B de même type avec $AB = BA = I_n$. Il est facile de montrer (le faire) qu'il suffit qu'il existe B tel que $AB = I_n$ pour que A soit inversible (d'inverse B). Cela fonctionne également avec l'hypothèse $BA = I_n$. Autrement dit, dans cet anneau, inversible équivaut à inversible à droite ou à inversible à gauche : l'explication (et la démonstration), c'est le théorème du rang et ses conséquences.*

2 Matrices équivalentes, matrices semblables

2.1 Matrices d'applications linéaires

Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension respectives p et n. On suppose que l'on a choisi une base $\mathcal{B} = (e_i)$ pour E et une base $\mathcal{C}$ pour F. Pour tout vecteur x de E, on note $M_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, de même pour les vecteur de F.

Proposition 47 *L'application $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ qui à f associe la matrice*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{C}}(e_1) & M_{\mathcal{C}}(e_2) & \dots & M_{\mathcal{C}}(e_n) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. De plus, pour tout vecteur x de E :

$$M_{\mathcal{C}}(f(x)) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(x)$$

La démonstration se fait comme dans le cas particulier du théorème précédent, mais il ne s'agit plus d'un isomorphisme canonique, il dépend des bases choisies. On peut également composer des applications linéaires : si g est une application linéaire de F dans G muni d'une base $\mathcal{D}$, on obtient :

Proposition 48

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$$

2.2 Changement de base

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que E est muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et que F est muni de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Commençons par définir la matrice de passage.

Définition 49 *La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice carrée dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$.*

On peut remarquer qu'il s'agit de la matrice $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$. Cela prouve en particulier que la matrice de passage est inversible, d'inverse la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}$. Cela permet également de chercher comment se composent les matrices de passage.

On peut maintenant préciser comment se comportent les matrices de vecteurs et d'applications linéaires vis-à-vis du changement de base. Pour simplifier les écritures, nous utiliserons les notations suivantes : X et X' sont les matrices de coordonnées d'un même vecteur x par rapport aux bases $\mathscr{B} = (e_i)$ et $\mathscr{B}' = (e'_i)$, Y et Y' les coordonnées de son image $f(x)$ par rapport aux bases $\mathscr{C} = (c_i)$ et $\mathscr{C}' = (c'_i)$, P et Q sont les matrices de passage, A et A' sont les matrices de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ (resp. par rapport aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$). On a alors :

Proposition 50

$$X = PX', \qquad Y = QY', \qquad A' = Q^{-1}AP$$

Démonstration. On peut présenter diverses démonstrations, basées sur de simples calculs, ou sur l'interprétation des matrices de passages en terme de matrice de l'identité... Choisissons une démonstration formelle, mais non formalisée : nous utiliserons comme objets des matrices lignes formées de vecteurs. Ainsi, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E'}$ désignent des matrices lignes (de même $\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{C'}$)

$$\overrightarrow{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \qquad \overrightarrow{E}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

et donc

$$x = \overrightarrow{E}X = \overrightarrow{E'}X', \qquad \overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E}P \Rightarrow \overrightarrow{E}PX' = \overrightarrow{E}X \Rightarrow X = PX'$$

Par ailleurs

$$f(x) = y = \overrightarrow{C}AX = \overrightarrow{C}'A'X' \Rightarrow \overrightarrow{C}APX' = \overrightarrow{C}QA'X' \Rightarrow AP = QA' \Rightarrow A' = Q^{-1}AP$$

Les justifications précises sont laissées au lecteur. ■

Remarque 51 *Les vecteurs et leurs coordonnées sont donc transformés suivant les formules*

$$\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E}P \qquad X = PX'$$

Cette différence est le reflet de la distinction pénible en algèbre entre la droite et la gauche, ou, pour faire plus sérieux, entre objets covariants et contravariants.

2.3 Matrices équivalentes

Le paragraphe précédent incite à se poser la question : qu'ont de commun les matrices d'une application linéaire par rapport à des base différentes ? Cette question conduit à une classification des matrices (et par la même les applications linéaires).

Définition 52 *Deux matrices A et B de même type sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $B = PAQ^{-1}$. D'après le paragraphe précédent, cela revient à dire que A et B représentent la même application linéaire par rapport à des bases éventuellement différentes.*

Le matrices P et Q doivent bien sûr être de type adéquats. La relation ainsi définie est bien sûr un relation d'équivalence. Nous allons décrire les classes d'équivalence, et dans chaque classe décrire un représentant privilégié.

Rappelons la définition du **rang** d'une application linéaire ou d'une matrice.

Définition 53 *Le rang d'une application linéaire f est la dimension de l'image de f. Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes.*

Il y a un lien entre les deux définitions : le rang d'une matrice est aussi le rang d'une application linéaire représentée par cette matrice.

La classification recherchée est déterminée par

Théorème 54 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Il existe plusieurs démonstrations, choisissons une méthode géométrique, efficace mais un peu abstraite. Une méthode algorithmique sera donnée dans l'annexe sur le pivot. **Démonstration.** Soit f une application linéaire non nulle de E (dimension p) dans F (dimension n) et A sa matrice par rapport à des bases quelconques. Si r est le rang de f, le théorème du rang dit que le noyau est de dimension $p-r$. On choisit une base $(e_{r+1},\dots,e_p)$ du noyau de f, et on la complète en une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E. Les vecteurs $(e_1,\dots,e_r)$ forment une base d'un supplémentaire du noyau, lequel est isomorphe à l'image de f. Les vecteurs $e'_i = f(e_i)$ forment une base de $\operatorname{Im} f$, que l'on peut compléter en une base de F. La matrice de f par rapport à ces deux bases prend la forme

$$J_{r,n,p} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où 0 représente une matrice bloc de 0, de taille adéquate, éventuellement vide. Nous avons ainsi démontré que toute matrice A d'une application de rang r est équivalente à $J_{r,n,p}$. Il reste à observer que pour des valeurs de r et r' distinctes, $J_{r,n,p}$ et $J_{r',n,p}$ étant de rang différent ne peuvent représenter la même application linéaire, donc ne sont pas équivalentes. ■

Remarque 55 *La relation d'équivalence, peut être introduite au travers de l'action de* $\mathbf{GL}(n,K)\times\mathbf{GL}(p,K)$ *sur* $\mathscr{M}_{n,p}(K)$, *définie par* $(P,Q).A = PAQ^{-1}$ *(l'exposant permet d'avoir une action à gauche).*

2.4 Matrices semblables, trace

Une autre relation d'équivalence entre matrices est liée aux changement de base pour les endomorphismes.

Définition 56 *Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(K)$ sont* ***semblables*** *s'il existe une matrice inversible $P \in GL(n,K)$ telle que $A = PBP^{-1}$. Cela revient à dire que A et B représentent la même application linéaire par rapport à des bases éventuellement différentes, P étant la matrice de passage.*

La relation de similitude est d'équivalence, et des matrices semblables sont nécessairement équivalentes. La recherche des classes d'équivalence, et de représentant privilégiés pour chaque classe s'avère plus redoutable que pour la simple équivalence, mais elle a un intérêt géométrique plus important. Elle ne sera, à notre niveau, résolue que dans le cas où le corps est $\mathbb{C}$.

Remarque 57 *On dit que deux endomorphismes sont semblables si leurs matrices sont semblables : cela signifie qu'ils sont identiques, à un changement de base prêt ; ainsi, deux projections sur une droite sont des endomorphismes semblables.*

Contentons nous d'un seul critère pour commencer.

Définition 58 *Si A est une matrice carrée, on appelle trace de A (notée $\mathrm{tr}(A)$) la somme des éléments diagonaux de A.*

L'application trace est de façon immédiate une forme linéaire (dont le noyau est l'hyperplan des matrices de trace nulle), et elle a la propriété supplémentaire suivante :

Proposition 59 *Si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(K)$:*

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

La démonstration se fait par le calcul. On en déduit :

Proposition 60 *Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.*

Démonstration.

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(BP^{-1}P) = \mathrm{tr}(B)$$

■ Cela permet de définir la trace d'un endomorphisme : c'est la trace de sa matrice, par rapport à n'importe quelle base.

Remarque 61 *La relation de similitude peut être introduite par l'action $A \mapsto PAP^{-1}$ qui est une action par automorphisme intérieur. Le stabilisateur de A pour cette action est l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec A.*

3 Systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, nous donnerons une version théorique de la résolution des systèmes linéaires. Les méthodes pratiques seront rappelées dans le chapitre sur le pivot. Les formules de Cramer seront également présentées plus loin.

3.1 Définition

Définition 62 *Un système linéaire $\mathscr{S}$ d'inconnues $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est un système d'équations :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

*où les $(a_{i,j})$ et les (b_i) sont des scalaires donnés. Une **solution** du système est un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que les égalités ci-dessus soient simultanément satisfaites.*

Ajoutons un peu de vocabulaire :
– $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ s'appelle **matrice** du système.
– Le système est dit **homogène** si le second membre est nul (tous les b_i sont nuls).
– Il est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.
– Le rang de la matrice A s'appelle **rang** du système.

3.2 Interprétation

On peut interpréter la matrice A comme celle d'une application linéaire f de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, par rapport aux bases canoniques. Si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est la matrice d'un élément b de $\mathbb{K}^p$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est celle d'un vecteur x de $\mathbb{K}^n$, résoudre le système linéaire $AX = B$ équivaut à rechercher tous les vecteurs x tel que $f(x) = b$. Dans le cas d'un système homogène, il s'agit donc de la recherche du noyau.

Il est parfois intéressant de faire d'autres interprétations : résoudre un système homogène c'est rechercher une relation de liaison entre les vecteurs colonnes, ou, dans le cas non homogène, c'est rechercher à écrire un vecteur en fonction des vecteurs colonnes. C'est aussi étudier l'intersection d'hyperplans (affines dans le cas non homogène).

3.3 Théorème principal

Théorème 63 *L'ensemble des solutions d'un système affine $AX = B$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$. Plus précisément :*
- *Si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des solutions est vide.*
- *Si $b \in \mathrm{Im}(f)$ et si $x_0 = f(b)$, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des vecteurs du sous-espace affine passant par x_0 de direction $\mathrm{Ker}\, f$. Ce sous espace affine est de dimension $n-$rang($\mathscr{S}$).*

Il existe un cas particulier important, celui des systèmes de Cramer.

Définition 64 *Un système $AX = B$ s'appelle système de Cramer si la matrice A est carrée inversible.*

Un système de Cramer a donc une solution unique, que l'on peut écrire $X = A^{-1}B$. Il existe des « formules » (dites "de Cramer") qui donnent les solutions à l'aide de déterminants : voir le chapitre "déterminants".

3 Pivot

1 Premier Pivot

Dans cette section, nous donnons des résultats élémentaires sur la méthode dite "du pivot". Cette méthode sera reprise de façon diverse et variée par la suite. Notre objet de départ est un système linéaire de p équations à n inconnues : si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ est la matrice des coefficients pris dans un corps K, un tel système $(\mathscr{S})$ s'écrit

$$AX = B$$

avec $X \in \mathscr{M}_n(K)$ représentant les inconnues et $B \in \mathscr{M}_p(K)$ le second membre. Nous noterons A' la matrice $A' = (A|B)$, matrice-bloc.

Dans la système $\mathscr{S}$ ainsi décrit, on s'intéresse à l'ensemble S des solutions, c'est-à-dire à l'ensemble des matrices X telles que $AX = B$.

1.1 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 65 *On appelle* ***opération élémentaire*** *sur la matrice A une des trois opérations :*
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$*, dilatation de ligne : la ligne i est multipliée par le scalaire non nul* λ*.*
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$*, transvection de ligne : la ligne i est remplacée par elle-même additionnée de la ligne j multipliée par le scalaire* λ $(i \neq j)$*.*
- $L_i \leftrightarrow L_j$ *: échange de deux lignes de la matrice A.*

On définit exactement de la même façon les opérations élémentaires sur les colonnes.

Pour être plus économique, notons que la troisième opération élémentaire (échange de ligne), peut être réalisée à l'aide des autres. Cela n'a guère d'intérêt pratique...

$$L_j \leftarrow L_j - L_i,\ L_i \leftarrow L_i + L_j,\ L_j \leftarrow L_j - L_i,\ L_j \leftarrow -L_j$$

a le même effet que l'échange des deux lignes.

1.2 Traduction matricielle

Théorème 66 *Chacune des opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice A équivaut à la prémultiplier (resp. la postmultiplier) par une matrice d'un des types suivant :*
- $I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii}$ *(matrice de dilatation)*
- $I_n + \lambda E_{ij}$ *(resp.* $I_p + \lambda E_{ji}$*) (matrice de transvection)*
- $I_n - E_{ii} - E_{JJ} + E_{ij} + E_{ji}$ *(matrice de transposition)*

Il faut « dessiner » les matrices pour comprendre... Notons que ces matrices sont carrées et inversibles (les inverses sont du même type).

1.3 Application aux matrices inversibles

Soit $A \in GL_n(K)$ une matrice (carrée) inversible.

Théorème 67 *Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer A en une matrice triangulaires supérieure.*

Il suffit d'appliquer la méthode du pivot, que l'on peut décrire ainsi :

1. Par permutation éventuelle de ligne, on obtient une matrice $A^{(1)}$ où $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
2. Par transformation élémentaires $L_i^{(1)} \mapsto L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, on obtient une matrice $A^{(2)}$ dont la première colonne est Par permutation éventuelle de ligne, on obtient un système équivalent de matrice $A^{(2)}$, avec $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
3. On reprend l'étape 2 pour les équations de 2 à n, puis de 3 à n jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.

On procède en plusieurs étapes :

1. Par permutation éventuelle de ligne, on obtient un système où $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
2. Par transformations élémentaires $L_i^{(1)} \mapsto L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, on fait disparaître l'inconnue x_1 des équations 2 à n. Par permutation éventuelle de ligne, on obtient un système équivalent de matrice $A^{(2)}$, avec $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
3. On reprend l'étape 2 pour les équations de 2 à n, puis de 3 à n jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Remarques : l'hypothèse sur A permet de voir qu'il y a toujours un élément non nul qui peut servir de pivot (pourquoi ?). Il existe une variante : on fait à chaque étape une dilatation, de sorte que le pivot soit ramené à 1. LeLa matrice triangulaire supérieure obtenue aura une diagonale de la forme $(1,1,\dots,1,d)$ où d est le déterminant de A. Enfin, le nombre des opérations de cette méthode est $O(n^3)$.

Proposition 68 *Les opérations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice.*

1.4 Algorithme du pivot

L'idée de ces méthodes est la suivante : quand la matrice d'un système linéaire est triangulaire supérieure ou échelonnée, la résolution du système est immédiate (elle se fait en n étapes). On se place dans le cas où le système est carré et la matrice du système est inversible. Tout repose sur :

Proposition 69 *Soit (S) un système de matrice A. Toute opération élémentaire sur les lignes de A donne un système équivalent à (S).*

3.1. Description de l'algorithme du pivot

Remarques : - si on pivote à nouveau en remontant, on peut transformer A en une matrice diagonale, toujours par opérations sur les lignes.
- il est possible, dans le cas où les coefficients sont entiers, de faire des transformations du type $L_i^{(1)} \mapsto a_{11}^{(1)} L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(1)}$, pour éviter les rationnels (dans l'échelonnage).

Exemple : inversion d'une matrice par la méthode du pivot, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. Pivot dans le cas général Commençons par définir une matrice échelonnée. Soit L une matrice ligne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La largeur $l(L)$ et l'entier ℓ tel que :

$$\begin{cases} L_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n-\ell \\ L_{n-\ell+1} \neq 0 \end{cases}$$

Si la ligne est nulle, on dira que sa largeur est nulle. Le coefficient $L_{n-\ell+1}$ s'appelle le pivot de la ligne. On dit qu'une matrice de p lignes L_1, L_2,..., L_p est **échelonnée** si l'on a :

$$l(L_1) > l(L_2) > \ldots > l(L_k)$$

pour un certain k inférieur à p, les lignes suivantes étant nulles.

Proposition 70 *Par opérations élémentaires sur les lignes, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée.*

Il suffit d'appliquer la méthode du pivot de Gauss, en précisant que s'il n'y a pas de "pivot" à une certaine étape, on passe à l'étape suivante.

Dans certains cas, il est utile de simplifier encore davantage le système obtenu par des opérations élémentaires sur les colonnes.

1.5 Opérations élémentaires sur les systèmes

On appelle **opération élémentaire** sur le système $\mathcal{S}$ une des trois opérations :
- P_{ij} : Échange de deux équations, échange de deux lignes de la matrice A'.
- $T_{ij}(\lambda)$, transvection de ligne : l'équation i est remplacée par elle-même additionnée de l'équation j multipliée par le scalaire λ ; même description pour la matrice A'.
- $D_i(\lambda)$, dilatation de ligne : la ligne i est multipliée par le scalaire non nul λ. Même description pour la matrice A'.

Le résultat immédiat, qui justifie ces opérations élémentaires est le suivant :

Théorème 71 *Le système obtenu $\mathcal{S}'$ après une succession d'opérations élémentaires sur le système $\mathcal{S}$ a le même ensemble de solutions que le système $\mathcal{S}$.*

1.6 Méthode du pivot

L'objectif de la méthode du pivot est d'obtenir un nouveau système, équivalent au système initial, et particulièrement simple à analyser.

Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme f est diagonalisable si E est somme directe des sous-espaces propres,c-à-d quand il existe une base de vecteurs propres.

Conditions nécessaires et suffisantes

- Le polynôme caractéristique est scindé, et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme caractéristique.
- Il existe un polynôme annulateur scindé simple.
- Le polynôme minimal est scindé simple.

Les deux dernières affirmations nécessitent le « Lemme des noyaux ».

Conditions suffisantes

- Il y a n valeur propres distinctes, et la dimension est n.
- L'endomorphisme est symétrique. On peut alors trouver une b.o.n. de vecteurs propres.
- L'endomorphisme est hermitien (cas complexe). On peut alors trouver une b.o.n. de vecteurs propres.
- L'endomorphisme est normal (cas complexe).

Questions et exercices :

1. Une question théorique : soit λ_i une valeur propre. Montrer que $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant \alpha_i$, où α_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique ? On pourra utiliser un supplémentaire de E_{λ_i} et écrire une matrice.
2. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est diagonalisable que si elle est nulle.
3. Montrer que si A est diagonalisable, alors tout polynôme en A est diagonalisable. Application à la matrice circulante
$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$
On se place sur $\mathbb{C}$. (Sorosina, 9.11).
4. Montrer que si deux endomorphismes diagonalisables commutent, alors ils sont simultanément diagonalisables. On sera amené à utiliser le lemme :
Si f est diagonalisable et si F est un sev f-stable, alors la restriction de f à F est encore diagonalisable.
5. Soit $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ une matrice déterminée par :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que A est diagonalisable. En déduire les sous-espaces stables par u.

4 Déterminants-dualité

5.5 Déterminants
Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.
Comatrice . Formules de Cramer. Orientation d'un R-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes.
Groupes $SL(E)$ et $SL(n,K)$.
5.6 Dualité
Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Bijection, à l'aide de l'orthogonalité, entre l'ensemble des sous-espaces de E et l'ensemble des sous-espaces de E^*. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.
Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

1 Déterminants

1.1 Formes multilinéaires

Définition 72 *Soit E un K-espace vectoriel et f une application de E^k dans K (avec $k \in \mathbb{N}$). On dit que f est une forme multilinéaire si les k applications partielles sont linéaires.*

La définition des applications partielles est claire : on "bloque" $k-1$ arguments, et on dispose alors d'une application de E dans K. Si $k = 1$, une forme 1-linéaire est une forme linéaire. On parle aussi de forme bilinéaire pour $k = 2$. Si $E = K^k$, une forme k-linéaire peut toujours s'écrire sous la forme

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in I_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1,1} x_{i_2,2} \dots x_{i_k,k} \qquad (*)$$

où $I_n = \{1, 2, \dots, n\}^k$, et où les $x_{i,j}$ sont les coordonnées du vecteur x_j.

Exo. 73 *Justifier cette affirmation. Comment s'interprètent les coefficients $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ en terme de la base canonique (e_i) ?*

Cette écriture peut être simplifiée avec la notion de multi-indice, que nous ne développerons pas. Si E est de dimension finie (hypothèse que l'on fixe à partir de maintenant), on se ramène à cette écriture en choisissant une base.

Proposition 74 *L'ensemble des formes k-linéaires est un K espace vectoriel de dimension n^k, où n est la dimension de E.*

Nous reviendrons sur les cas des formes bilinéaires dans le chapitre .....Pour le moment, nous allons nous limiter au cas des formes multilinéaires **alternées**.

Définition 75 *Une forme k-linéaire est alternée si $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$ dès que deux des vecteurs x_1, x_2, $\dots x_k$ sont égaux.*

Une forme linéaire est donc forcément alternée. Montrons pour commencer qu'une forme k-linéaire alternée a également la propriété qu'on appelle antisymétrie.

Définition 76 *Un forme k-linéaire est **antisymétrique** si*

$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

pour tout choix de vecteurs et tout choix d'indice.

On a donc alors

Proposition 77 *Toute forme k-linéaire alternée est aussi antisymétrique. La réciproque est vraie si la caractéristique de K est différente de 2.*

La démonstration est laissée au lecteur (utiliser la linéarité et le vecteur $x_i + x_j$). Le cas de la caractéristique 2 est intéressant, mais sera exclu de notre étude. Les formes k-linéaires alternées forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les formes, on le note $\Lambda^k(E)$. Si on s'intéresse au cas particulier des formes antisymétriques n linéaires dans un espace de dimension n, on obtient le résultat suivant :

Proposition 78 *L'espace vectoriel $\Lambda^n(E)$, où E est de dimension n, est de dimension 1.*

Avant d'écrire la démonstration générale, observons le cas $n = 2$ (le cas $n = 1$ n'est pas assez intéressant). Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base, la bilinéarité fait qu'il suffit de connaître f pour les (e_i, e_j) pour que f soit déterminée. Le fait que la forme soit alternée et donc antisymétrique fait que $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_2, e_1)$. Le développement de $f(x_1, x_2)$, comme fait dans le cas général de la formule $(*)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & \quad f(x_{1,1}e_1 + x_{2,1}e_2, x_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2) && (4.1)\\ = & \quad x_{1,1}x_{1,2}f(e_1, e_1) + x_{1,1}x_{2,2}f(e_1, e_2) && (4.2)\\ & \quad x_{2,1}x_{1,2}f(e_2, e_1) + x_{2,1}x_{2,2}f(e_2, e_2) && (4.3)\\ = & \quad (x_{1,1}x_{2,2} - x_{2,1}x_{1,2})f(e_1, e_2) && (4.4) \end{aligned}$$

On peut choisir $f(e_1, e_2)$ dans K, de façon quelconque, car on vérifie tout de suite que f définie par

$$f(x_1, x_2) = k(x_{1,1}x_{2,2} - x_{2,1}x_{1,2})$$

est bilinéaire alternée. **Démonstration.** Le fait que la forme soit alternée, et donc antisymétrique, conduit à une simplification de la formule $(*)$: les coefficients $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ sont nuls dès que deux indices sont égaux. De plus, si σ est la permutation définie par $\sigma_k = i_k$, σ peut s'écrire comme composée de transpositions, de sorte que

$$f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \epsilon(\sigma) f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

puisque chaque transposition de deux vecteurs change le signe. En définitive, on obtient

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \dots x_{\sigma(n),n} \right) f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Ce qui prouve que l'espace des formes n-linéaires alternées est au plus de dimension un. Il reste à vérifier qu'une application ainsi définie est bien n-linéaire alternée, et c'est moins immédiat que dans le cas $n = 2$.

Si on appelle $\det_{\mathscr{B}}$ la forme qui prend la valeur 1 pour le n-uple $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors toute forme n-linéaire alternée est colinéaire à cette forme. ■

Cette forme particulière, qui dépend de la base choisie, s'appelle donc le déterminant en bas $\mathscr{B}$. Une première propriété, issue directement de la définition.

Proposition 79 *Un système de n vecteurs dans un espace de dimension n est libre (donc est une base) si et seulement si son déterminant dans une base quelconque est non nul.*

Démonstration. Si le système est lié, un des vecteurs est combinaison des autres, donc, en développant et en utilisant la multilinéarité, on voit que le déterminant est nul. ■ On peut s'intéresser également aux formes k-linéaires alternée de façon générale. Le résultat essentiel est le suivant.

Proposition 80 *L'espace vectoriel $\Lambda^k(E)$, où E est de dimension n, est de dimension $\binom{k}{n}$.*

En particulier, si k est supérieur strict à n, il n'y a pas de forme k-linéaire alternée autre que la forme nulle. Si $k = 1$, l'ensemble des formes k-linéaires alternées est le dual de E, il est bien de dimension n. Si $k = 2$, la même démarche que ci-dessus montre que toute forme k-linéaire alternée est combinaison de formes du type

$$e_i^* \wedge e_j^(x, y) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}$$

avec $i \neq j$ (et en utilisant une base $\mathscr{B} = (e_i)$).

1.2 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Le déterminant défini dans la section précédente est un scalaire associé à n-vecteurs, dans un espace de dimension n. Sa valeur numérique dépend de la base, mais sa nullité dépend de l'indépendance des vecteurs.

1.3 Application

2 Dualité

5 Réduction des endomorphismes

5.7 Réduction des endomorphismes
Sous-espaces stables par un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme annulateur, polynôme minimal. Décomposition des noyaux.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée lorsque le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Sous-espaces caractéristiques. Théorème de Cayley-Hamilton.
Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux. Diagonalisation par blocs. Décomposition de Dunford : lorsque le polynôme caractéristique est scindé, existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$.
Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires, etc.).
5.8 Cas où le corps K est R ou C Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathscr{L}(E)$. Définition de $exp(u)$, application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
Exemples de parties denses de $\mathscr{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathscr{L}(E)$; si $K = C$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathscr{L}(E)$.

Diagonalisation

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Un vecteur **non nul** x est un vecteur propre de f s'il existe un scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$[1]. L'ensemble des vecteurs propres associés à λ est un sous-espace vectoriel si on lui ajoute le vecteur nul, car c'est $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$; il est parfois noté E_λ.

Un scalaire λ est une valeur propre si et seulement si on a $\det(f - \lambda \mathrm{id}) = 0$. Le polynôme $\det(f - X\mathrm{id}) = \chi_f(X)$ est appelé *polynôme caractéristique* de f. Ses racines sont les valeurs propres, leur ensemble est le *spectre* de f.

Questions et exercices :

1. Rappeler les formules de changement de base pour un endomorphisme, ainsi que la définition de la similitude de matrices. Qu'est-ce alors qu'une matrice diagonalisable ?
2. Donner un exemple d'endomorphisme qui n'a aucun vecteur propre. Citer des cas où on est assuré de l'existence d'au moins un vecteur propre.

1. Cela équivaut à dire que la droite $\mathrm{vect}(x)$ est f-stable.

3. Soit u en endomorphisme de E. On dit qu'un s.e.v. F est u-stable si $u(F) \subset F$. On peut alors définir la restriction de u à F.
   a) Montrer qu'un s.e.p. F de u est u-stable. Quel est alors la restriction de u à F ?
   b) Soit r une rotation vectorielle en dimension 3. Déterminer des sev r-stable. Sont-ce des s.e.p ?
   c) Montrer que si u admet deux supplémentaires u-stables, alors la matrice de u est diagonale par blocs dans une base adaptée à la somme directe.
4. Une application à l'analyse. Soit $Y' = AY$ un système différentiel où la matrice A est constante, diagonalisable. Montrer que si les valeurs propres sont les λ_i et des vecteurs propres associés les ϵ_i, alors une base des solutions du système est formée des fonctions $t \mapsto e^{\lambda_i t}\epsilon_i$. Application : solutions du système
$$\begin{cases} u'(t) = 2v(t) \\ v'(t) = u(t) - v(t) \end{cases}$$
   Allure des courbes intégrales.
5. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice-compagnon :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
6. Si f est un endomorphisme et P un polynôme tel que $P(f) = 0$ (on dit que P est un **polynôme annulateur**). Montrer que toute valeur propre de f est une racine de P. Réciproque ? Quelles sont les applications linéaires dont le polynôme annulateur est $X^2 - X$?
7. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur. En dimension 2, caractériser ainsi les matrices de projections et les matrices de symétrie.
8. Montrer que si λ_1, λ_2, ..., λ_k sont des valeurs propres distinctes, alors les s.e.p. $(E_{\lambda_i})_i$ sont en somme directe.
9. On dit qu'une matrice S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **stochastique** si : tous ses coefficients sont dans $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall i, \sum_j s_{ij} = 1$$
   Montrer que toutes les matrices stochastiques ont une valeur propre et un vecteur propre commun. Montrer que l'ensemble des matrices stochastique est stable pour le produit. Est-ce un groupe pour le produit ?
   Montrer que si S matrice stochastique admet une valeur propre complexe λ, alors $|\lambda| \leqslant 1$. (Francinou-Cassini, tome 2, p. 75)

Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme f est diagonalisable si E est somme directe des sous-espaces propres,c-à-d quand il existe une base de vecteurs propres.

Conditions nécessaires et suffisantes

– Le polynôme caractéristique est scindé, et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme caractéristique.

– Il existe un polynôme annulateur scindé simple.
– Le polynôme minimal est scindé simple.
Les deux dernières affirmations nécessitent le « Lemme des noyaux ».

Conditions suffisantes
– Il y a n valeur propres distinctes, et la dimension est n.
– L'endomorphisme est symétrique. On peut alors trouver une b.o.n. de vecteurs propres.
– L'endomorphisme est hermitien (cas complexe). On peut alors trouver une b.o.n. de vecteurs propres.
– L'endomorphisme est normal (cas complexe).

Questions et exercices :

1. Soit K un corps. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$.
2. Une question théorique : soit λ_i une valeur propre. Montrer que $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant \alpha_i$, où α_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique ? On pourra utiliser un supplémentaire de E_{λ_i} et écrire une matrice.
3. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est diagonalisable que si elle est nulle.
4. Montrer que si A est diagonalisable, alors tout polynôme en A est diagonalisable. Application à la matrice circulante
$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$
On se place sur $\mathbb{C}$. (Sorosina, 9.11, Francinou t2, p. 94)).
5. On suppose que f et g sont "simultanément" diagonalisables. Montrer que f et g commutent. Réciproquement, montrer que si deux endomorphismes diagonalisables commutent, alors ils sont simultanément diagonalisables. On sera amené à utiliser le lemme :
Si f est diagonalisable et si F est un sev f-stable, alors la restriction de f à F est encore diagonalisable. (p. ex. Francinou, t.2, p. 92, qui traite le cas d'une famille quelconque.)
6. Soit $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ une matrice déterminée par :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que A est diagonalisable. En déduire les sous-espaces stables par u. (Sorosina, p. 270)
7.

Trigonalisation

On dit qu'un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base pour laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Le théorème essentiel est le suivant :

Théorème f est trigonalisable ssi χ_f est scindé. (1) (2) f est trigonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé.

Un corollaire est que, sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable. La pratique de la trigonalisation n'est pas évidente, car il y a en général "beaucoup" de bases de trigonalisation. On commence bien sûr par utiliser les sep, et il faut "compléter".

Questions

1. Démontrer le théorème précédent. Il y a une partie "facile", l'autre peut se faire par récurrence.
2. Soit K un corps. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$.
3. Une minitrigonalisation.
   a) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, dont le polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. On suppose que $f \neq \mathrm{id}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ est de dimension 1. Soit e_2 un vecteur qui n'est pas dans ce noyau. On pose $e_1 = f(e_2) - e_2$. Calculer $f(e_1)$. En déduire que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de f dans cette base.
   b) Généraliser au cas où $\chi_f(X) = (-1)^n (X-1)^n$.
   c) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases}$$

   Allure des courbes intégrales.
4. Montrer que si f et g commutent et si f est trigonalisable, alors g est trigonalisable.
5. Donner des exemples de matrices (ou endomorphismes) trigonalisables et non diagonalisables.
6. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = 0$. Montrer que B est nilpotente. On commencera par calculer $AB^k - B^k A$. (Francinou, t. 2, p. 107)
7. Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et soit Soit $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'ils sont denses dans l'ensemble de toutes les matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Et dans le cas réel ?
8. On admettra que $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: montrer que c'est l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
9. Déduire le théorème de Cayley-Hamilton de la densité de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer de même que pour tout matrice complexe :

$$\det(e^M) = e^{\mathrm{tr}\, M}$$

5.7 Réduction des endomorphismes
Sous-espaces stables par un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme annulateur, polynôme minimal. Décomposition des noyaux.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée lorsque le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Sous-espaces caractéristiques. Théorème de Cayley-Hamilton.
Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux. Diagonalisation par blocs. Décomposition de Dunford : lorsque le polynôme caractéristique est scindé, existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$.
Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires, etc.).
5.8 Cas où le corps K est R ou C Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathscr{L}(E)$. Définition de $exp(u)$, application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
Exemples de parties denses de $\mathscr{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathscr{L}(E)$; si $K = C$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathscr{L}(E)$.

Polynômes d'endomorphisme

Polynôme minimal

Si u est un endomorphisme, $P \in K[X]$ un polynôme, on définit $P(u)$ qui est un endomorphisme. On a alors un morphisme d'algèbre :

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

Questions :

1. Prouver que le noyau de ce morphisme n'est pas réduit à 0. On appelle polynôme minimal, noté μ_u son générateur unitaire. Ce polynôme peut-il être constant ?
2. Décrire les endomorphismes dont le polynôme minimal est du premier degré.
3. Polynôme minimal de la dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$? Et dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Soit v la restriction de u à un sous-espace stable. Que dire des polynômes minimaux et caractéristiques de v par rapport à ceux de u ?
5. Si A est diagonale par blocs, exprimer polynômes caractéristiques et minimaux de A par rapport à ceux des blocs diagonaux.
6. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'un bloc de Jordan.
7. On note $K[u]$ l'image de ϕ_u. Montrer que c'est une K algèbre. Quelle est sa dimension ? Est-il possible que ce soit un corps ?
8. Montrer que les valeurs propres du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de u.

Un exercice intéressant mais pas très facile Soit u un endomorphisme dans un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie (muni d'une structure hermitienne). On note μ_u le polynôme minimal.

1. Soit x un vecteur fixé. On note $I_{u,x}$ l'ensemble défini par :

   $$I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$$

   Montrer que c'est un idéal. On note $\mu_{u,x}$ son générateur unitaire. Montrer que $\mu_{u,x}$ divise μ_u. Que dire si x est un vecteur propre ?
2. Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par u (on introduira un vecteur propre de u^*)
3. Soit h et y deux vecteurs distincts de E. Montrer qu'il existe des scalaires λ et μ distincts tels que $\mu_{u,h+\lambda y} = \mu_{u,h+\mu y}$. On note P ce polynôme.
4. Montrer qu'alors $P(u)(y) = P(u)(h) = 0$.
5. Montrer qu'il existe x dans E tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$.

(cf. Rombaldi, p. 14 de "thèmes pour l'agreg")

Théorème de Cayley-Hamilton

Son énoncé peut prendre deux formes :

– Le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique.
– $\chi_u(u) = 0$

On peut démontrer également que χ_u et μ_u ont les mêmes facteurs irréductibles : pourquoi est-ce immédiat dans le cas où $K = \mathbb{C}$?

Donnons quelques applications :

– Le polynôme minimal est de degré inférieur à la dimension de E.
– En dimension 2, comparer polynôme minimal et polynôme caractéristique. Quand sont-ils égaux ?
– Si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A.
– Si T triangulaire supérieure est inversible, son inverse est triangulaire supérieure.

Il existe plusieurs démonstrations, assez différentes. Une démonstration "géométrique" utilise :
Lemme : Montrer que pour un endomorphisme-compagnon [2], on a

$$\chi_u(X) = (-1)^n \mu_u(X)$$

Démontrer ce lemme ou bien voir Warusfel (t.2, p. 245), ou Delcourt-Goblot, puis en déduire le théorème : l'idée de la démonstration est alors très belle (et utile) : si x est un vecteur quelconque, $(x, u(x), \ldots, u^k(x), \ldots)$ engendrent un sous-espace stable F et la restriction de u à ce sous-espace est un endomorphisme-compagnon.

Polynômes annulateurs - Lemme des noyaux

Lemme des noyaux

1. Montrer que, si P est un polynôme quelconque, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont toujours des sous-espaces u-stables. Existe-t-il des sous-espaces u-stables qui ne sont pas de cette forme ?

2. Le nom officiel est : endomorphisme-cyclique.

2. Soit P un polynôme, qui peut s'écrire $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ où les P_i sont premiers entre eux **deux à deux**. Si u est un endomorphisme, on veut démontrer le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

Pour des raisons compréhensibles, le lemme des noyaux s'applique le plus souvent à des polynômes annulateurs.

   a) On note Q_i le polynôme défini par :

   $$Q_i(X) = \frac{P(X)}{P_i(X)}$$

   Montrer qu'il existe des polynômes U_i tels que :

   $$1 = \sum_{i=1}^{k} U_i(X) Q_i(X)$$

   Trouver les U_i lorsque $P(X) = X^2(X-1)(X-2)$ (penser à une décomposition en éléments simples...)

   b) Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ est bien la somme des $\operatorname{Ker} P_i(u)$ en utilisant la question précédente.

   c) Montrer que la somme est directe.

   d) Montrer que les projections sur les noyaux parallèlement à la somme des autres sont des polynômes en u (plus précisément en sa restriction à $\operatorname{Ker} P(u)$.

3. Déduire du lemme des noyaux une CNS de diagonalisabilité.
4. Montrer qu'une matrice de projection, de symétrie, de permutation est diagonalisable (en précisant le corps).
5. On suppose que u est diagonalisable, et que F est un sous-espace-vectoriel u-stable. Justifier que la restriction $u|_F$ de u à F est aussi diagonalisable.
6. On suppose que $(u_i)_{(i\in I)}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. Montrer qu'ils sont simultanément diagonalisables.

Projecteurs spectraux, Décomposition de Dunford

1. On suppose que u est diagonalisable. L'espace vectoriel E est donc somme directe de sous-espaces propres et, si on note π_i les projections sur ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres, on a

   $$u = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \ldots + \lambda_k\pi_k$$

   Écrire alors tout polynôme en u en fonction des π_i et en déduire que π_i entant que polynômes en u (Lagrange).

2. On suppose que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est

   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Trouver les matrices des projecteurs orthogonaux, en fonction de A, puis en déduire la matrice A^k (cf. Warusfel, p.251)

3. On suppose maintenant que u a un polynôme caractéristique scindé :

   $$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont distincts. Montrer que E est somme directe des « sous-espaces caractéristiques », c'est-à-dire des $\mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$.

4. On noté π_i les projecteurs spectraux. Les calculer en fonction de u lorsque $\chi_u(X) = (X+1)(X-1)^2$.
5. Montrer que chaque sous-espace caractéristique est de dimension α_i.
6. On suppose toujours que u a un polynôme caractéristique scindé. Montrer que u s'écrit de façon unique comme
$$u = d + n$$
où d est diagonalisable, n nilpotent, et $d \circ n = u \circ n$. C'est la décomposition de Dunford.
Indication : on posera $d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i$. Pour la commutativité, on montrera que d et n sont des polynômes en u. Pour l'unicité, on fera comme d'habitude.
7. Déterminer la décomposition de Dunford de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
8. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$. En déduire toutes les matrices complexes A telles que $\exp(A) = I_n$. Plus dur : montrer que l'image de exp est $\mathbf{GL}(n\mathbb{C})$. (X-ENS, 2, p.113)

Commutant

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Le commutant de A est l'ensemble des matrices B telles que $AB = BA$. Montrer que c'est une K-algèbre qui contient la K-algèbre $K[A]$ des polynômes en A.
2. Lorsque $K = \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer le commutant de A et montrer qu'il coïncide avec $K[A]$. Donner un exemple où il y a inclusion stricte.
3. Soit A diagonalisable ; ses valeurs propres distinctes sont les λ_i, de multiplicités α_i. On suppose qu'il y en a r et que la dimension est n. Calculer les dimensions de $K[A]$ et de $\mathscr{C}(A)$ (commutant de A). Á quelle condition les deux algèbres coïncident-elles ? (X-ENS, 2, p. 133)

Petit intermède : normes matricielles

E est un K-e.v, $\mathscr{M}$ est l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ sur le corps K. Lorsque K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathscr{M}$ est un e.v.n. de dimenson finie, pour lequel toutes les normes sont équivalentes. Dans la suite du problème, on supposera donc que K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que, quelle que soit la norme $\|.\|$, il existe un positif λ tel que :

   $$\|AB\| \leqslant \lambda \|A\| \, \|B\|$$

   Si on peut prendre $\lambda = 1$, on dit que la norme est *sous-multiplicative*.

2. Soit $\|.\|$ une norme sur K^n. Montrer qu'on définit une norme sur $\mathscr{M}$ en posant :

   $$\|A\| = \sup_{x \in S^{n-1}} \|Ax\|$$

   où S^{n-1} est la sphère unité dans K^n. Vérifier que cette norme est sous-multiplicative. On dit que c'est une norme *subordonnée*.

3. On va dans ce parargraphe déterminer quelques normes subordonnées. On se donne dans K^n les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$. Montrer que, si $A = (a_{i,j})$, on a :
   – la norme subordonnée à la norme 1 est :

   $$\|A\| = \sup_j \sum_i |a_{ij}|$$

   – la norme subordonnée à la norme ∞ est :

   $$\|A\| = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$$

4. On appelle (parfois) *norme de Schur* la norme issue d'un produit scalaire et qui fait de la base canonique une base orthonormée. Montrer que cette norme est définie par :

   $$\|A\|_s = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)}$$

   C'est un exercice classique, mais pas immédiat de montrer que cette norme est sous-multiplicative : commencer par montrer que si A et B sont deux matrices hermitiennes positives, on a :

   $$0 \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

   et, pour cela, on pourra commencer par supposer que A est diagonale.

5. Montrer que la norme de Schur n'est pas une norme subordonnée (pour $n > 1$).

6. Dans cette question, on recherche la norme matricielle subordonnée de la norme euclidienne canonique sur K^n. On note $\|A\|_2$ cette norme et on note $\rho(A)$ le *rayon spectral* de A, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres complexes de A.

   a) Montrer que si A est une matrice normale, alors

   $$\|A\|_2 = \rho(A)$$

   b) Montrer que, pour toute matrice,

   $$\|A\|_2 = \|A^*\|_2$$

   c) Montrer que, pour toute matrice,

   $$\|A\|_2 = \sqrt{\|A^* A\|} = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

Matrices compagnons, endomorphismes cycliques, (largement hors-programme

1. Si u est un endomorphisme et x un vecteur, on note $\mu_{u,x}$ le générateur unitaire du noyau de : $P(X) \mapsto P(u)(x)$, de $\mathbf{K}[X]$ dans E. Montrer que si μ_u est le polynôme minimal, il existe x tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$. On pourra commencer par le cas où μ_u est puissance d'un polynôme irréductible.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   – Il existe x tel que E est engendré par x, $u(x)$, $u^2(x)$,..., $u^{n-1}(x)$.
   – Il existe une base pour laquelle la matrice de u est une matrice compagnon.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

   – On a $\chi_u(X) = \mu_u(X)$.
   On dit alors que u est un endomorphisme cyclique.
3. Montrer qu'un endomorphisme dont la matrice est un bloc de Jordan est cyclique. Plus généralement, reconnaître les endomorphismes cycliques d'après la réduite de Jordan. Quand un endomorphisme cyclique est-il diagonalisable ?
4. On peut alors démontrer que tout endomorphisme se décompose en somme directe de k sous-espaces cycliques, chacun associé à un polynôme μ_i de sorte que :

$$\mu_k | \mu_{k-1} | \cdots | \mu_1 \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = \mu_u, \qquad\qquad \mu_1 \mu_2 \dots \mu_1 = \chi_u$$

   Ces polynômes sont uniques, caractérisent u à similitude près. On les appelle *facteurs invariants*. Voir goblot ou gourdon (annexe).

De la cyclicité

On rappelle qu'un endomorphisme f de E, de dimension n est cyclique s'il existe un vecteur x_0 tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Montrer que f est cyclique si et seulement si sa matrice est semblable a une matrice compagnon.
2. Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme cyclique ?
3. On rappelle le lemme d'évitement : un espace vectoriel ne peut être l'union finie de sous-espaces stricts (K de cardinal infini. ref. Goblot, p.111). Après l'avoir (éventuellement) démontré, montrer qu'en endomorphisme qui n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables est cyclique. La réciproque est vraie (Goblot, p. 109)
4. Toujours avec ce lemme, montrer que pour tout endomorphisme, f, il existe un vecteur x_0 tel que $\mu_f = \mu_{f,x_0}$, où ce dernier polynôme est le générateur unitaire du noyau de $P(X) \mapsto P(f)(x_0)$. (cf. FG, 2, p. 129 ; il y a une démo plus technique p. 124)
5. Montrer qu'un endomorphisme est cyclique si, et seulement si, son polynôme minimal est de degré n (et donc coïncide, au signe près, avec le polynôme caractéristique).
6. Quels sont les endomorphismes cycliques qui sont diagonalisables ? Y a t-il "beaucoup" d'endomorphismes cycliques ?
7. Quels sont les endomorphismes cycliques qui sont nilpotents ?
8. Montrer que f n'admet aucun sous-espace stable non trivial si et seulement si χ_f est irréductible dans K.
9. Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique f coïncide avec $K[f]$ (ensemble des polynômes en f). Indication : si g commute avec f, montrer que g est caractérisé par $g(x_0)$. La réciproque est vraie. (Goblot, par exemple)
10. Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{C})$, ensemble des matrices cycliques, est ouvert. Quelle est son adhérence ? (Francinou, X-ENS, 2)

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes. Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne
Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.
7.1 Espaces euclidiens
Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$. Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données. Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier. Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).
7.2 Angles
Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de R vers $SO(2)$. Mesure des angles. Angles orientés de droites en dimension 2.
Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours. Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.
7.3 Calcul matriciel et normes euclidiennes
Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.
7.4 Calculs vectoriels en dimension 3
Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.
7.5 Espaces hermitiens
Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$. Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

Notions de base

Soit ϕ une **forme bilinéaire symétrique** définie dans un K-espace vectoriel (K sous-corps de $\mathbb{C}$). On se limite à la dimension finie.

1. On suppose que $\mathscr{B} = (e_i)$ est une base. Montrer que ϕ est déterminée par

$$M = (m_{ij}) \qquad \text{où } m_{ij} = \phi(e_i, e_j)$$

   Comment se traduit le fait que ϕ est symétrique ? Vérifier que, avec des notations « évidentes »,

$$\phi(x, y) = {}^tXMY$$

On dit que M est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ Les f.b.s. forment un espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel des matrices symétriques. Pourriez-vous de même interpréter l'e.v. des matrices antisymétriques ?

2. On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si $\phi(x, y) = 0$. On définit $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A\ \phi(x, y) = 0\}$, lorsque A est une partie quelconque. On sait que $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$ et que $A^\perp$ est un sev. Dans le cas de $\phi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, f.b.s. sur $E = \mathbb{R}^2$, déterminer l'orthogonal d'une droite. Existe-t-il des droites orthogonales à elles-mêmes ?
3. On considère les applications $x \mapsto \phi(x, *) = (y \mapsto \phi(x, y))$ et $y \mapsto \phi(*, y) = (x \mapsto \phi(x, y))$ qui sont de E dans E^*. Elles sont linéaires. Déterminer leur matrice par rapport aux bases (e_i) et (e_i^*).
4. On appelle $\boxed{\textbf{noyau}}$ de la forme bilinéaire symétrique le sous-espace $E^\perp$: c'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E.

   Rechercher le noyau de :
   $$\phi(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - 4x_2 y_2$$
   Lien avec la question précédente ?
5. On dit que ϕ est $\boxed{\textbf{non dégénérée}}$ si $E^\perp = \{0\}$. Montrer qu'alors l'application $x \mapsto \phi(x, *)$ est une application injective de E dans E^*. Pourquoi est-elle bijective ? Le rang de l'application $x \mapsto \phi(x, *)$ s'appelle le $\boxed{\textbf{rang}}$ de la forme bilinéaire symétrique ; c'est aussi le rang de la matrice M.
6. Un exemple : si ℓ est une forme linéaire non nulle, montrer que $(x, y) \mapsto \ell(x)\ell(y)$ est une forme bilinéaire symétrique de rang 1. Montrer que l'on peut trouver une base de E de sorte que la matrice de ϕ soit $E_{1,1}$.
7. On suppose que $\mathscr{C}$ est une base de E, et que P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Si on pose $M = M_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $M' = M_{\mathscr{C}}(\phi)$, montrer que l'on a :
   $$M' = {}^tPMP$$
   On dit que deux matrices vérifiant cette relation sont $\boxed{\textbf{congruentes}}$. Montrer que deux matrices congruentes sont équivalentes.
8. Montrer, par récurrence sur la dimension, que pour toute forme bilinéaire symétrique, il existe une base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux. Trouver une telle base pour la f.b.s. de 2. Que dire de la matrice de ϕ dans une telle base ? Montrer que, si le corps est $\mathbb{C}$ deux matrices symétriques équivalentes sont congruentes.

Formes quadratiques

À une forme bilinéaire symétrique ϕ, on peut associer une application q de E dans K définie par : $q(x) = \phi(x, x)$, appelée forme quadratique associée. Le vocabulaire associé aux formes bilinéaires s'applique aux formes quadratiques : rang, noyau...

1. Une forme quadratique est-elle une forme linéaire ? Montrer que la connaissance de q implique la connaissance de ϕ. On donnera la méthode abstraite et une règle applicable si on connaît la forme quadratique en termes de coordonnées.
2. On appelle $\boxed{\textbf{cône isotrope}}$ d'une forme quadratique l'ensemble des vecteurs x tels que $q(x) = 0$. Montrer que c'est un cône. Est-ce un espace vectoriel ? Montrer que le noyau est toujours inclus dans le cône isotrope. On dit que q est $\boxed{\textbf{définie}}$ si son cône est réduit à $\{0\}$.
3. **Décomposition en carrés** Soient $(\ell_i)_{i=1..r}$ r formes linéaires **indépendantes**. On dit que l'on a décomposé une forme quadratique en carrés s'il existe (λ_i) scalaires non nuls tels que
   $$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i^2(x)$$

En utilisant le théorème de la section précédente, montrer que toute forme quadratique peut être décomposée en carrés, et que r est le rang de q. Démontrer que le noyau de q est l'intersection des noyaux des formes linéaires ℓ_i. (Sorosina, p. 288)

4. Rappeler, sur les exemples suivants, la méthode de Gauss, qui permet d'obtenir une décomposition en carrés :

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{5.1}$$
$$q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz - 8yz \tag{5.2}$$
$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3x_1 \tag{5.3}$$

5. Montrer que la méthode de Gauss permet de trouver une base dans laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale. Le faire dans le cas du second exemple ci-dessus.
6. Cas réel : on suppose maintenant que $K = \mathbb{R}$. On dit que q est **positive** si, pour tout $x \in E$, $q(x) \geqslant 0$. Démontrer qu'une forme quadratique **définie** est soit **positive**, soit **négative**. (gourdon, p.233)
7. Rappeler comment on démontre l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (\phi(x,y))^2 \leqslant q(x)q(y)$$

et en déduire :
Un forme quadratique **positive** est **définie** si et seulement si elle est **non dégénérée**. On dit alors que c'est un $\boxed{\textbf{produit scalaire}}$. On sera amené à comparer le cône isotrope et le noyau.
8. Rappeler le **théorème d'inertie de Sylvester**, et en déduire la classification des formes quadratiques réelles. Remarque culturelle : la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{Q}$ est plus intéressante, et plus difficile... Cela va souvent ensemble.
9. Traitons des formes quadratiques sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le nombre p est premier différent de 2. Et suivons (X-ENS), p. 217.
   a) Démontrer qu'il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés non nuls dans $\mathbb{K}$.
   b) Soient a et b non nuls dans $\mathbb{K}^*$. En utilisant un argument de dénombrement, montrer qu'il existe toujours une solution à l'équation

   $$ax^2 + by^2 = 1$$

   c) Montrer qu'il y a deux classes de formes quadratiques en dimension 2. Montrer que c'est aussi le cas en dimension 1 et en dimension n.

Exercices

1. Soit M la matrice d'une f.q. réelle positive. Montrer que le déterminant de cette matrice n'est pas indépendant de la base (contrairement au cas des endomorphismes). Montrer que si q est positive (resp. définie positive), alors $\det(M) \geqslant 0$ (resp. $\det(M) > 0$). Montrer que ce n'est pas une condition suffisante (indic. contre-exple en dimension 2).
2. Soit a réel et q_a la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q_a(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+xz+yz)$$

   a) Pour quelles valeurs de a q_a est-elle non dégénérée ?
   b) Trouver une base orthogonale pour toutes les q_a.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique de Lorentz, définie par :

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

a) Montrer que q est non dégénérée et décrire le cône isotrope (ou ensemble des vecteurs v tels que $q(v) = 0$.

b) Montrer que l'orthogonal d'une droite est un plan. Est-il possible que $D \subset D^{\perp}$?

c) (de la géométrie plane) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, M un point de coordonnées (a, b) et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by = 1$. À quelle condition $\mathscr{D}$ coupe-t-elle le cercle $\mathscr{C}$? Montrer qu'alors M est extérieur au disque de bord $\mathscr{C}$. On note N_1 et N_2 les points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}$. Montrer que (MN_1) et (MN_2) sont tangentes au cercle. En déduire une construction géométrique de $\mathscr{D}$ connaissant M. Lien avec ce qui précède.

d) Revenant à $\mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble des points m tels que $q(m) = 1$ ou $q(m) = -1$.

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et tel que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. On considère une forme bilinéaire ϕ, non dégénérée et admettant un vecteur isotrope (non nul) c.a.d. un vecteur non nul x tel que $\phi(x, x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On dit alors que E est un plan hyperbolique : pourquoi ?

c) Déterminer l'ensemble des endomorphismes u tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ \phi(u(x), u(y)) = \phi(x, y)$$

On note cet ensemble $\mathbf{O}(\phi)$. Pourquoi est-ce un groupe pour la loi $\circ$?

d) Plus généralement, montrer que s'il existe un vecteur isotrope et si la forme quadratique est non dégénérée, alors il existe une base de vecteurs isotropes. XENS p.191

5. (Gourdon, p. 232). Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que les formes suivantes sont des formes quadratiques et déterminer leur signature.
– $A \mapsto (\operatorname{tr} A)^2$
– $A \mapsto \operatorname{tr}({}^t A A)$
– $A \mapsto \operatorname{tr}(A^2)$
– $A \mapsto \operatorname{tr}(SA^t A)$ (où S est une matrice symétrique).

Généralités sur les espaces euclidiens

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note $\langle.,.\rangle$ un *produit scalaire*, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive. On note $\|.\|$ la norme associée. On parle alors d'**ev euclidien** dans le cas de la dimension finie, **préhilbertien réel** dans le cas général.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire : dans quel cas y a t-il égalité ?
2. Démontrer qu'un système orthogonal de vecteurs (ils sont deux à deux orthogonaux) est un système libre. Si on suppose que les (x_i) sont deux à deux orthogonaux, montrer que l'on a :
$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$
3. Qu'appelle-t-on produit scalaire hermitien ?

Isométries vectorielles

On appelle *isométrie vectorielle* ou *transformation orthogonale* une application linéaire qui conserve la norme des vecteurs. En plus de l'identité, les isométries les plus simples sont les symétries orthogonales. S'il s'agit de symétries orthogonales par rapport à un hyperplan, on parle de *réflexions*.

1. Montrer qu'une isométrie conserve le produit scalaire. On montre que si une application conserve le produit scalaire, c'est forcément une application linéaire.
2. Démontrer que si une application linéaire est une isométrie, elle transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Réciproque ?
3. Montrer qu'une application linéaire est une isométrie si et seulement si sa matrice Ω dans une base orthonormée vérifie ${}^t\Omega\Omega = I$. On dit que c'est une matrice orthogonale.
4. Montrer qu'une matrice est orthogonale si et seulement si c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées. En déduire les matrices orthogonales en dimension 2. Et, pourquoi pas, en dimension 1. Montrer que leur ensemble $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ est un groupe.
5. Quel peut être le déterminant d'une matrice orthogonale ? Montrer que les matrices orthogonales de déterminant $+1$ forment un sous-groupe de l'ensemble des matrices orthogonales. On le note $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R})$. Montrer que, pour $n = 2$, c'est un groupe commutatif. À quels groupes est-il isomorphe ?
6. On appelle *rotation* un élément de $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{O}^-(2,\mathbb{R}) = \mathbf{O}(2,\mathbb{R}) \setminus \mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$ ne contient que des réflexions. Toujours en dimension 2, étudier le conjugué d'une rotation par une réflexion. Application aux groupes diédraux (finis ou infinis).
7. Un théorème dit que tout élément de $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ est composé d'au plus n réflexions : le vérifier en dimension deux. Comment faire la démonstration en général ? Trouver un autre exemple d'un groupe qui est engendré par des éléments involutifs.
8. Montrer que, pour $n = 3$, $-\mathrm{id}$ est composé de trois réflexions.

Tout sur Gram

Soit E un espace euclidien ou préhilbertien réel (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire et de dimension infinie). On considère n vecteurs x_1, …,x_n et l'on appelle matrice de Gram du système la matrice $G(x_1,\ldots,x_n)$ définie par :
$$G(x_1,\ldots,x_n) = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

1. Montrer qu'une matrice de Gram est symétrique. Montrer également qu'elle est positive (c'est-à-dire que, pour toute colonne X, $q(X) = {}^tXGX \geqslant 0$.)

2. Montrer que le rang de la matrice de Gram est égal au rang du système $(x_1,\dots,x_n)$. On introduira $F = \text{vect}(x_1,\dots,x_n)$ et l'application u définie dans F par :

$$u(x) = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \dots, \langle x, x_n\rangle)$$

3. Dans le cas $n = 2$ quel est le déterminant de la matrice de Gram ? Quel est son signe ?
4. Soit $(e_i)_{i=1..k}$ une base orthonormée de F. On note M la matrice des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cette base. Montrer que
$$G = {}^tMM$$
En déduire (à nouveau) que le déterminant de G est positif. Peut-on en faire une interprétation géométrique ?
5. Exprimer le volume d'un tétraèdre à l'aide des longueurs de ses côtés.
6. Soit f un élément de E. On note $p(f)$ la projection orthogonale de f sur F. Montrer que $d = \|f - p(f)\|$ représente le minimum de la distance de f à un élément de F. On dit que c'est la distance de f à F.
7. Montrer que
$$d^2 = \frac{\det(G(f, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\det G(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$
8. Montrer que toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.
9. Application 1 : familles isométriques.
On suppose que E est euclidien et que $(u_1,\dots,u_p)$ et $(v_1,\dots,v_p)$ sont deux familles de p vecteurs. Montrer que leurs matrices sont égales si et seulement si il existe une transformation orthogonale f telle que $f(u_i) = v_i$ pour tout i. Si A et B sont deux matrices rectangulaires de même dimension, à quelle condition a-t-on ${}^tAA = {}^tBB$? (F.G. tome 3, p.56)
10. Application 2 : familles équiangulaires. Sous quelle condition existe-t-il un réel λ et une famille de vecteurs unitaires (e_i) telle que

$$\forall (i,j), i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle = \lambda \qquad ?$$

Endomorphismes symétriques dans un espace euclidien

Adjoint

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que l'égalité

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y) \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

définit un endomorphisme u^*, appelé l'adjoint de u.

2. Soit A la matrice de u **dans une base orthonormée**. Déterminer la matrice A^* de u^* dans la même base orthonormée.
3. Que dire de l'adjonction vis-à-vis de la somme, du composé d'endomorphismes ? Dire des choses également sur noyaux et images. Montrer que l'adjoint d'une symétrie est une symétrie que l'on précisera. Montrer que F est u-stable si et seulement si $F^{\perp}$ est u^*-stable.
4. On dit que u est un endomorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle si $u^* = u^{-1}$. Justifier le vocabulaire. Montrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un groupe pour la loi de composition.

Endomorphismes symétriques

1. On s'intéresse maintenant aux **endomorphismes symétriques**, c'est-à-dire aux endomorphismes tels que $u = u^*$. Forment-ils un groupe ? Un sev ?
2. On suppose que u est symétrique. On définit ϕ_u par :

$$\phi(x, y) = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Montrer que ϕ est bilinéaire symétrique et que l'on définit ainsi un isomorphisme entre les endomorphismes symétriques et les formes bilinéaires symétriques. Comparer la matrice de u et la matrice de ϕ, dans une base $\mathscr{B}$ **orthonormée**.

3. Que dire des matrices de u et de la forme bilinéaire associée lorsqu'on change de base orthonormée ?
4. Le **théorème spectral** s'énonce : tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. On peut le montrer en utilisant les étapes :
   - Toute valeur propre complexe d'une matrice symétrique est réelle.
   - Les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
   - L'endomorphisme est diagonalisable.

   Déduire une relation entre les valeurs propres de u et la signature de la forme bilinéaire associée ϕ_u.
5. Qu'appelle-t-on endomorphisme symétrique positif ? Défini positif ? Que dire des valeurs propres ?

Coniques et théorème spectral

On se place dans un plan affine euclidien et on considère une forme quadratique q, une forme linéaire ℓ et une constante b. On appelle **conique** l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé (O, i, j) défini par :

$$F(M) = F(x, y) = q(x, y) + \ell(x, y) + b = 0$$

où $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

1. Que devient l'expression de $F(M)$ quand on change de coordonnées ?

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, e_2) telle que l'équation de la conique prenne la forme :
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$$
3. Montrer que, si la forme quadratique q est non dégénérée, il existe un repère telle que l'équation de la conique prenne la forme :
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^3 + b' = 0$$
On dit qu'il s'agit d'une conique à centre.
4. Déterminer l'allure des coniques à centre.
5. Étudier le cas où la forme quadratique q est dégénérée.

Exercices

1. Chercher l'adjoint de $x \mapsto \langle a, x \rangle b$.
2. Diagonaliser en b.o.n. la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ En déduire la nature de la courbe : $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$
3. Soit f un endomorphisme tel que $f \circ f = \mathrm{id}$. À quelle condition f est-il symétrique ?
4. Soit u un endomorphisme. Montrer que $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont des endomorphismes symétriques positifs ? Quand sont-ils définis positifs ? Montrer que
$$\mathrm{rang}(u^* u) = \mathrm{rang}(uu^*) = \mathrm{rang}(u)$$
5. Soit u un opérateur symétrique positif. Montrer qu'il existe un unique opérateur symétrique positif v tel que $u = v^2$.
6. Décomposition polaire : montrer que toute matrice A inversible s'écrit de façon unique sous la forme :
$$A = \Omega S$$
où Ω est orthogonal et S symétrique définie positive. On commencera par montrer que S est la "racine carrée" de ${}^t AA$.
7. Théorèmes d'Appolonius (Ramis-Warusfel). Soit E le plan euclidien, et q la forme quadratique définie par :
$$q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$
et l'ellipse d'équation $q(x, y) = 1$.
   a) Établir que l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de l'ellipse est :
   $$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$$
   b) On dit que deux droites passant par l'origine sont conjuguées si l'une coupe l'ellipse en deux points où les tangentes sont parallèles à l'autre. Montrer que deux droites sont conjuguées si elles sont orthogonales pour ϕ, la forme bilinéaire associée à q.
   c) Montrer que si A_1 et A_2 sont deux points de l'ellipse tels que (OA_1) et (OA_2) sont conjugués, alors :
   $$OA_1^2 + OA_2^2 = a^2 + b^2, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = ab$$
   Si B_1 et B_2 sont deux points de l'ellipse tels que OB_1 et $Ob2$ sont orthogonaux (pour le structure euclidienne...) alors :
   $$\frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OB_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Géométrie

7. Géométrie affine réelle en dimension finie
Définition d'un espace affine réel. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.
Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.
Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme entre le stabilisateur d'un point et le groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.
Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.
Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

Géométrie, exercices divers

1. Comment définit-on un espace affine, un sous-espace affine. Lien avec les espaces vectoriels ?
2. Une application affine est définit de façon abstraite par :

   Définition 81 *f de E dans E est affine s'il existe $\overrightarrow{f} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{E})$ telle que, pour tous M, N d'images M', N', on a*
   $$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$$

   De façon concrète :
   $$X' = AX + B$$

   où X et X' sont des matrices de coordonnées dans un repère, A et B à préciser. Une application affine f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est ; l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme. Si on se limite au cas bijectif, quel est le noyau ? L'image réciproque de $\mathbb{R}$id ?
3. Propriétés de "conservation" des applications affines. Cas des aires (des volumes).
4. Soit $GA_O(E)$ le sous-groupe des applications affines fixant le point O. A quel groupe est-il isomorphe ? Que sont ses conjugués par translations ?
5. Que penser du groupe affine de la droite complexe ?
6. Soit f affine de E dans E telle que $f \circ f = \text{id}$. Que dire de $\overrightarrow{f}$? Montrer que f a un point fixe, puis que f est une symétrie.
7. Comment définir des points (affinement) indépendants ? Comment définir une combinaison linéaire de points ? Que peut représenter la notation $A + \overrightarrow{u}$?
8. Soit dans un plan de repère affine (A, B, C), un point M. Comment sont définies les coordonnées barycentriques de M ? Si l'on dispose d'une structure euclidienne, comment les évaluer en terme d'aires ? Application : coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit.
9. On nomme fonction vectorielle de Leibniz (resp. scalaire), les champs définis par :
   $$\overrightarrow{F}(M) = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{MA_i}, \qquad f(M) = \sum_i \alpha_i MA_i^2$$

   Donner la « réduction » de ces deux expressions, en distinguant le cas où le poids total est, ou n'est pas, nul.
10. Lorsque le poids total n'est pas nul, trouver une expression de la fonction scalaire de Leibniz en G, qui ne fasse intervenir que les points du système.
11. (Audin, p. 45) Etant donné un triangle ABC, construire A', B' et C' tels que B' soit le milieu de AC', C' celui de BA' et A' celui de CB'.
12. Qu'est-ce qu'un ensemble convexe ? Comment

13. On est en dimension n. Démontrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble est la réunion des enveloppes convexes des sous-familles de $n+1$ points. C'est le théorème de Carathéodory.
14. Imaginer un moyen de prolonger la notion de barycentre pour qu'elle s'adapte au cas où le poids total est nul.
15. Soit x un point de $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Si σ est une permutation, on pose

$$\sigma.x=(x_{\sigma^{-1}(1)},x_{\sigma^{-1}(2)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)})$$

(Au fait, pourquoi ?), et $C(x)$ l'enveloppe convexe des $\sigma.x$ lorsque σ parcourt le groupe symétrique. Pour y dans $\mathbb{R}^n$, on note $\overline{y}$ le vecteur dont les coordonnées sont celles de y dans l'ordre décroissant. Montrer que :

$$y\in C(x) \iff \sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i \text{ et } \sum_{i=1}^{k}\overline{y}_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i$$

Dans quels cas l'intérieur de $C(x)$ est-il non vide ? (arnaudiès, groupe et géom 1 p.328)

Complément sur la convexité

1. Montrer que si $\mathscr{C}$ est convexe, alors $\overline{\mathscr{C}}$ est convexe.
2. Montrer qu'un convexe est d'intérieur vide si et seulement si il est inclus dans un hyperplan. On supposera désormais que les convexes sont d'intérieur non vide : il suffit de se placer dans le sous-espace affine qu'ils engendrent.
3. **Lemme de densité.** Soit $\mathscr{C}$ un convexe, P un point de l'intérieur, Q un point de l'adhérence. Montrer que l'intervalle $[P,Q[$ est inclus dans l'intérieur de $\mathscr{C}$.
4. Soit $\mathscr{C}$ un convexe. Montrer que l'adhérence de $\mathscr{C}$, l'intérieur de $\mathscr{C}$ sont des convexes. On peut montrer que ces trois convexes ont même intérieur, même adhérence, même frontière.
5. Soit A à l'extérieur d'un convexe fermé $\mathscr{C}$. Comment définir la projection A' de A sur $\mathscr{C}$? On montrera l'existence puis l'unicité de la projection, puis Quelles sont les propriétés de cette projection ?
6. Comment définir un hyperplan d'appui d'un convexe fermé ? Lien entre projection et hyperplan d'appui ?

   Justifier qu'en tout point de la frontière d'un convexe fermé il existe un hyperplan d'appui.
7. Démontrer le théorème de Krein-Milmann : un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.
8. Soit S une sphère de centre O et de rayon R. On dit que deux points M et M' sont conjugués si $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=R^2$. Montrer que l'ensemble des conjugués de $M\neq O$ est un hyperplan, appelé hyperplan polaire de P. Si F est un sous-espace affine ne passant pas par O, on appelle transformé de F par polaires réciproque l'intersection des hyperplans polaires des points de F. On note F^S ce transformé. Montrer que $F\mapsto F^S$ est une involution. On étudiera des exemples en dimension deux et en dimension trois.
9. Si $\mathscr{C}$ est un convexe contenant O, on note $\mathscr{C}^*$ son dual :

$$\mathscr{C}^*=\{M' \mid \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}\leqslant R^2\}$$

   Examiner des exemples. Montrer que c'est une involution de l'ensemble des convexes contenant O.
10. On considère un convexe $\mathscr{C}$. On appelle **point extrémal** un point M tel que, si $M\in[AB]$ où A et B sont dans $\mathscr{C}$, alors $M=A=B$. Définir de même une droite extrémale. Montrer que S_n^+ est un cône positif, en repérer les droites extrémales. (Allessandri)

Isométries de l'espace affine euclidien : décomposition

Un peu de réflexion Un théorème important et assez élémentaire.
Théorème
Toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

1. Montrer qu'une isométrie fixant 4 points non coplanaires est l'identité.
2. Soit f une isométrie fixant trois points non alignés A,B et C. On supose que $f \neq \mathrm{id}$, et soit D tel que $f(D) = D'$ et D sont distincts. Motrner que le plan ABC est le plan médiateur de $[DD']$, et déduire du 1 que f est la réflexion par rapport à ce plan.
3. Soit f une isométrie fixant 2 points distincts A, B. Montrer que f est l'identité, une réflexion, ou le composé de deux réflexions.
4. etc...

Voir Ladegaillerie, p.284 ou M.Audin p.56. Voir aussi comment la démonstration se fait en dimension quelconque : Audin, Perrin, Berger. Comparaison avec le cas vectoriel ?

La forme réduite Le résultat qui permet de ramener l'étude des isométries affines (du plan) à l'étude des isométries vectorielles, est le suivant :
Théorème
Soit f une isométrie affine. Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$, et une unique isométrie ayant un point fixe (au moins) tels que :

$$f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$$

Remarques

- À cause de l'unicité, si f admet un point fixe, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul.
- Ce théorème est intéressant dans le cas où $\overrightarrow{u}$ est non nul, bien sûr... Il permet de définir : en dimension deux les **symétries glissées**, en dimension trois, les **vissages** et les **réflexions glissées**, etc...
- Lorsque la dimension est deux, on peut considérablement simplifier la démonstration, notamment la question de l'unicité, et on peut se servir en particulier de la décomposition en réflexions.

Voici, sous forme d'exercice, la démonstration qu'on trouve par exemple dans le livre de Michèle Audin (p.59) On se donne f isométrie.

1. Soit $\overrightarrow{f}$ une isométrie vectorielle. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux. (indic : on montrera l'orthogonalité d'un vecteur invariant quelconque avec un vecteur de $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$.)
2. Soit O un point quelconque. On décompose $\overrightarrow{Of(O)}$ dans la somme directe précédente :
$$\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}))$$
on pose $g = t_{-\overrightarrow{v}} \circ f$, montrer que g admet le point fixe A défini par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.
3. Vérifier que $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$;
4. Montrer l'unicité de $\overrightarrow{v}$ et donc de g ; on peut, en plus de Audin, consulter Ladegaillerie.
5. Une application : si f est une isométrie de l'espace affine euclidien telle que f^k a un point fixe ($k \geqslant 2$) alors f a un point fixe.

Isométries du plan : groupes diédraux

La référence utilisée est Ladegaillerie (p.288). On se place dans un plan affine euclidien E.

1. Rappeler (au besoin) la définition d'un polygone, d'un polygone convexe, d'un polygone régulier. Est-ce qu'un polygone convexe dont les côtés sont égaux est toujours régulier ? Une remarque : la définition des polyèdres convexes est plus difficile.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, il existe un polygone régulier $\mathscr{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ à n côtés.
3. Soit f une isométrie, quelle est l'image de $\mathscr{P}$ par f ? On note G le groupe des isométries du plan telles que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$. Pourquoi le groupe G est-il fini ?
4. Montrer que tout élément de G a pour point fixe l'isobarycentre des sommets de $\mathscr{P}$. Quel est cet isobarycentre ?
5. Soit $G^+ = G \cap I^+(E)$. Montrer que c'est un sous-groupe de G, composé uniquement de rotations.
6. Montrer que G^+ est le groupe cyclique engendré par $r = r_{0,\frac{2\pi}{n}}$ où O est le centre du polygone.
7. Montrer que G^- est non vide et ne contient que des réflexions. Soit s l'une de ces réflexions, que l'on précisera.
8. Montrer que G^+ et G^- sont en bijection. En déduire que G est de cardinal $2n$, et que ses éléments peuvent s'écrire r^k ou $s \circ r^k$ où $k = 0..n-1$. On le note $\mathbb{D}_{2n}$ ou $\mathbb{D}_n$ et on l'appelle **groupe diédral**.
9. Préciser comment se calcule le produit de deux éléments de G.
10. Détailler les éléments de $\mathbb{D}_6$. À quel groupe connu est-il isomorphe ? Détailler les éléments de $\mathbb{D}_8$, le groupe du carré.
11. Montrer que le groupe diédral est aussi engendré par s et $s' = r \circ s$.
12. Complément : que dire des axes des réflexions d'un groupe diédral ? On sera amené à distinguer les cas où n est pair des cas ou n est impair.

xemple Goblot (thèmes de géométrie), ou Ladegaillerie (exos

Groupes de frise

On suppose que G est un groupe d'isométries du plan dont l'intersection avec le groupe des translations est exactement l'ensemble des translations de la forme $t_{k\overrightarrow{u}}$ où k est dans $\mathbb{Z}$ et $\overrightarrow{u}$ est non nul, of course. On note D la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$ et Δ son orthogonal.

1. lemme : rappeler ce qu'est $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1}$ lorsque g est une application affine.
2. Montrer que si g est dans G, alors $\overrightarrow{g}$ est : soit I, soit $-I$, soit s_D soit s_Δ.
3. Que dire de l'image $\overrightarrow{G}$ de G par le morphisme direction ? On montrera qu'il y a cinq images possibles.
4. Montrer que si $\overrightarrow{G}$ contient $-\mathrm{id}$, il contient une symétrie centrale s_ω et qu'alors toutes les symétries centrales qu'il contient sont les $s_{\omega+k\overrightarrow{u}/2}$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.
5. Étudier le cas où $\overrightarrow{G}$ contient s_Δ.
6. Étudier le cas où G contient une symétrie glissée.
7. Que dire de G^+, ensemble des déplacements de G ? Donner des exemples de frises, dans le cas où $G = G^+$.
8. Examiner les isométries (autre que des translations) que peut contenir un groupe de frises.
9. Montrer qu'il y a sept groupes de frises.

Groupes d'isométries dans l'espace : le tétraèdre et le cube

1. Soit $\mathscr{T} = (A, B, C, D)$ un tétraèdre régulier.
   a) Définir un tel objet et montrer qu'il existe.
   b) Soit G le sous-ensemble des isométries de l'espace qui conserve $\mathscr{T}$ Montrer qu'il existe un morphisme ϕ de G dans S_4. Montrer que ce morphisme est injectif.
   c) Montrer qu'il existe une isométrie qui fixe A et B et échange C et D. En déduire que G est isomorphe à S_4.
   d) Détailler la nature de l'ensemble des éléments de G.
2. Soit $\mathscr{C} = (A, B, C, D, A', B', C', D')$ un cube. On a nommé les points de sorte que (A, B, C, D) soit un carré (direct) de côté 2 dans le plan $z = 1$ et M' l'image de M par la translation de vecteur $-2\overrightarrow{k}$. Soit G l'ensemble des isométries qui conservent le cube. Montrer qu'il existe un morphisme ϕ de G dans S_8, groupe des permutations des sommets du cube. Montrer que ϕ est injectif. Quand déduit-on pour le cardinal de G ?
3. Montrer qu'il existe des éléments de S_8 qui ne sont pas dans l'image de ϕ. Quand déduit-on pour le cardinal de G ?
4. Montrer (en considérant un repère d'origine A) G^+, groupe des rotations du cube contient 24 éléments que l'on détaillera.
5. Soit X l'ensemble des quatre "grandes diagonales" du cube. Montrer qu'il existe un morphisme de G^+ dans le groupe S_4 de permutation de ces grandes diagonales. Montrer que se morphisme est surjectif : en déduire que G^+ est isomorphe à $\mathscr{S}_4$.
6. Trouver un groupe isomorphe à G, décrire les éléments de G.

Exercices

1. Une méthode affine dans le cadre euclidien : ABC est un triangle, A' est le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$ de même pour B' et C'. Montrer, par une méthode barycentrique, que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes (en un point appelé point de Gergonne). (FG, tome III, p. 254)
2. On s'intéresse aux sous-groupes finis du groupe affine du plan. Soit G un tel groupe.
   a) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$.
   b) On s'intéresse maintenant à Γ, sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. Montrer que
   $$\langle x, y\rangle_\Gamma = \frac{1}{\Gamma}\sum_{g\in\Gamma}\langle g(x), g(y)\rangle$$
   est également un produit scalaire sur E.
   c) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$.
   d) Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$? Et de $\mathbf{O}(3,\mathbb{R})$
   e) Complément : théorème de Maschke. Si G est un sous-groupe fini du groupe linéaire, et s'il existe un sev F stable par tous les éléments de G, alors il existe un supplémentaire de F qui est aussi stable par tous les éléments de G.

   (FG, III, p. 309)
3. Montrer que dans un triangle, il existe un triangle inscrit de périmètre minimum. Le caractériser. (FG, tome 3,X.ENS)

8 Géométrie affine euclidienne orientée
8.1 Préliminaires
Pour toutes les situations géométriques, on distinguera les propriétés de caractère affine et celles de nature métrique (ou euclidienne), ainsi pour les coniques ou pour certaines notions différentielles (tangentes, normales, courbure, etc.). Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.
8.2 Généralités
Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire. Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3. Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.
Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.
Groupe des similitudes affines du plan.
8.3 Géométrie plane
Propriétés angulaires du cercle (angles au centre, angles inscrits) et applications.
Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles). Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles. Orthogonalité entre cercles.
8.4 Coniques
Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification affine : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre. Sections planes d'un cône de révolution. Mouvement à accélération centrale. Notions sur le mouvement des planètes.

Les angles

Les angles de vecteurs unitaires

Dans un plan vectoriel, nous voulons définir la notion d'angle de deux vecteurs unitaire qui traduise l'idée que deux demi-droites font le même angle si elles s'écartent l'une de l'autre de la même façon. Cet écart, nous n'allons pas tout de suite le mesurer, mais le caractériser :

Définition 82 *Soit $\mathscr{R}$ la relation :*

$$(u_1, u_2)\mathscr{R}(u_1', u_2') \iff \exists \rho \in O^+(\mathbb{E}),\ u_2 = \rho(u_1), u_2' = \rho(u_1')$$

Avant de poursuivre, rappelons le lemme :

Lemme 83 *Dans le plan, si on se donne deux vecteurs unitaires, il existe une et une seule rotation qui transforme l'un en l'autre.*

Est-ce encore vrai en dimension 3 ? Les résultats essentiels sont que :

1. C'est une relation d'équivalence.
2. L'ensemble des classes, appelé ensemble des angles, $\mathscr{A}$, est en bijection avec $O^+(\mathbb{E})$. On peut ainsi transporter la loi de composition des rotations et faire de l'ensemble des angles un groupe commutatif.

3. Démontrer alors la relation de Chasles pour les angles.

Les angles en dimension...quelconque

C'est un peu paradoxal de commencer par ce cas, mais il s'agit de montrer en quoi la dimension deux est particulière. Le point de départ est de regarder comment se transforment les demi-droites vectorielles par des transformations orthogonales.
Il existe une opération de $\mathbf{I}(\mathbb{E})$ sur l'ensemble des couples de demi-droites et :

Définition 84 *La relation $(\mathscr{D},\Delta) \equiv (\mathscr{D}',\Delta')$ définie par :*

$$\exists f \in \mathbf{I}(E),\ f(\mathscr{D} = \mathscr{D}' \qquad et \qquad f(\Delta) = \Delta'$$

est une relation d'équivalence : on appelle ***angle de demi-droites*** *une classe d'équivalence.*

Sur la même base, on peut parler d'angle entre un plan et une droite, entre deux plans (pour la dimension 3), ou plus généralement entre sous-espaces vectoriels (affines).

Exercices

1. Soit $\mathrm{O}(E)$, le groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe au moins une valeur propre. Que dire de l'orthogonal d'une droite propre. En déduire la classification des transformations orthogonales puis la classification des isométries.
2. **groupe du cube**

   a) Soit $\mathscr{C} = (A,B,C,D,A',B',C',D')$ un cube. On a nommé les points de sorte que (A,B,C,D) soit un carré (direct) de côté 2 dans le plan $z = 1$ et M' l'image de M par la translation de vecteur $-2\overrightarrow{k}$. Soit G l'ensemble des isométries qui conservent le cube. Montrer qu'il existe un morphisme ϕ de G dans S_8, groupe des permutations des sommets du cube. Montrer que ϕ est injectif. Quand déduit-on pour le cardinal de G ?

   b) Montrer qu'il existe des éléments de S_8 qui ne sont pas dans l'image de ϕ. Quand déduit-on pour le cardinal de G ?

   c) Montrer (en considérant un repère d'origine A) G^+, groupe des rotations du cube contient 24 éléments que l'on détaillera. On utilisera un résultat sur les actions de groupe.

   d) Soit X l'ensemble des quatre "grandes diagonales" du cube. Montrer qu'il existe un morphisme de G^+ dans le groupe S_4 des permutations de ces grandes diagonales. Montrer que se morphisme est surjectif : en déduire que G^+ est isomorphe à $\mathscr{S}_4$.

   e) Chercher matriciellement l'ensemble des transformations orthogonales qui conservent les trois axes.

   Pourquoi $O^+(2,\mathbb{R})$ est-il commutatif
   Montrer que tout élément u de $O(n,\mathbb{R})$ est composé de réflexions hyperplanes. Plus précisément, si $\dim(Inv(u)) = k$, on montrera par récurrence sur k que u est composé de k réflexions.
   Montrer que, en dimension 2, tout élément de $O^-(2,\mathbb{R})$ est une réflexion.
   Montrer qu'alors tout élément r de $O^+(2,\mathbb{R})$ et tout f de $O^-(2,\mathbb{R})$ vérifie :

   $$f \circ r \circ f^{-1} = r^{-1}$$

   En déduire que $O^+(2,\mathbb{R})$ est commutatif.
3. $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel euclidien. Montrer qu'il existe n vecteurs unitaires u_i tels que $\| u_i - u_j \| = 1$ pour tout $i \neq j$. Déterminer l'angle qu'ils font entre eux.

4.
5. Montrer que si les points A, B et C sont alignés, alors :

$$\forall M,\ \overline{BC}\,\overrightarrow{MA} + \overline{CA}\,\overrightarrow{MB} + \overline{AB}\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

   En déduire la **formule de Stewart** :

$$\overline{BC}MA^2 + \overline{CA}MB^2 + \overline{AB}MC^2 + \overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB} = 0$$

   En déduire la longueur d'une bissectrice en fonction des côtés du triangle.
6. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2.$$

   En déduire que les hauteurs d'un triangle concourent.
7. Si I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, montrer que, avec les notations habituelles :

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$$

   Généraliser.
8. ABC est un triangle, $\mathbb{D}$ une droite du plan. Si M est un point de $\mathbb{D}$, les symétriques des droites $(MA), (MB), (MC)$ coupent $(BC), (CA)(AB)$ en A', B', C' respectivement. Montrer que A', B', C' sont alignés.
9. Montrer que la somme des distances d'un point intérieur aux côtés d'un triangle équilatéral est constante.
10. Soit ABC un triangle. On considère le champ vectoriel défini par :

$$f(M) = MA^2\,\overrightarrow{BC} + MB^2\,\overrightarrow{CA} + MC^2\,\overrightarrow{AB}$$

    Quelle est l'image de O, centre du cercle circonscrit ?
    Montrer que, pour tout M, $f(M)$ est orthogonal à $veOM$.
11. Montrer que les hauteurs d'un triangle ABC sont les médiatrices d'un triangle dont A, B, C sont les milieux des côtés. Qu'en déduit-on ? Montrer que l'orthocentre d'un triangle a pour coordonnées barycentriques $(\tan(A), \tan(B), \tan(C))$.
12. On appelle « triangle orthique » de ABC le triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs. Montrer que l'orthocentre de ABC est le centre du cercle inscrit du triangle orthique. Montrer également que le triangle orthique est de périmètre minimum parmi les triangles inscrits dans ABC.
13. Montrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés sont sur le cercle circonscrit.
14. Soit ABC un triangle, M un point du plan. On appelle P, Q, R les projections orthogonales de M sur les côtés $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que P, Q, R sont alignés ssi M est un point du cercle circonscrit à ABC. (Droite de **Simson**).
15. Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet (i.e. :$BCDF$ sont quatre points tels que (BC) et (DF) se coupent en A et (BF) et (CD) se coupent en E).
    Les cercles circonscrits aux triangles ABF et EFD se coupent en F et en I. Montrer que les projections orthogonales de I sur $(AB), (AD), (BE), (ED)$ sont alignées.
    Montrer que les cercles circonscrits aux triangles (BCE) et ACD sont également sécants en I (appelé Point de **Miquel**).
    Montrer que I et les centres des cercles circonscrits aux triangles $(ABF), (EFD), (BCE), (ACD)$ sont cocycliques (Cercle de Miquel).
16. **Isogonologie**
    Soit ABC un triangle, M un point du plan et α, β, γ les symétriques de M par rapport aux trois

côtés. Si ces points ne sont pas alignés, on appelle **isogone** de M, le centre P du cercle circonscrit à α, β, γ.
Montrer que P existe ssi M n'est pas cocyclique à ABC. (Cf. la droite de **Steiner**)
Montrer que M est aussi l'intersection des **isogonales** (définition) à trouver...) des droites $(AM),(BM),(CM)$.
On définit ainsi une transformation involutive (pourquoi ?), d'une partie du plan dans une partie du plan. Quels en sont les points fixes ?
Quelle est l'isogonal de l'orthocentre du triangle ABC ?
On appelle « coordonnées normales » d'un point du plan du triangle ABC, des coefficients proportionnels aux distances (algébriques) aux trois côtés. Quelle relation lie les coordonnées normales de deux points isogonaux ?
Trouver une relation entre coordonnées normales et barycentriques.

17. **Isotomie**
ABC est un triangle et un point M tel que les droites $(AM),(BM),(CM)$ coupent $(BC),(CA),(AB)$ en A_1, B_1, C_1. On considère les symétriques A_2, B_2, C_2 de ces troix points par rapports aux milieux des côtés. Pourquoi les droites $(AA_2),(BB_2),(CC_2)$ se coupent-elles ?
On appelle **isotome** de M le point d'intersection ainsi défini.
Exemple : les points de contact D, E, F du cercle inscrit avec les côtés d'un triangles définissent un point (de **Gergonne**). Quel est son point isotome ?
Quelle relation lie les coordonnés barycentriques de deux points isotomes ?
18. Formules :

a) Démontrer, dans un triangle :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A \\
S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin B = \frac{1}{2} ca \sin B \\
S &= \frac{abc}{4R} \\
S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{Formule de Héron} \\
pr &= S \qquad r_a(p-a) = S \\
R + r &= R(\cos A + \cos B + \cos C)
\end{aligned}$$

19. Les coordonnées barycentriques de

$$G \text{ sont } (1,1,1)$$

$$O \text{ sont } (a\cos A, b\cos B, c\cos C)$$

$$H \text{ sont } (\frac{a}{\cos A}, \frac{b}{\cos B}, \frac{c}{\cos C})$$

$$I \text{ sont } (a, b, c)$$

20. **Inégalité isopérimétrique** Démontrer que, pour tout triangle, on a :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

et qu'il y a égalité seulement pour un triangle équilatéral.
21. **Problème de minimum** Montrer que le point M qui réalise le minimum de la somme des carrés des distances aux sommets ABC est le centre de gravité du triangle.
Montrer que le point M qui réalise le minimum de la somme des distances aux sommets ABC est le point qui voit les côtés sous un angle de 120° (point de Torricelli, à discuter, ça ne marche pas pour tous les triangles).

22. Construire un triangle dont on connaît les trois hauteurs, (respectivement les trois médiatrices, respectivement les trois bissectrices, respectivement les trois médianes).

    Géométrie dans l'espace

23. Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires d'un espace affine euclidien. On appelle I, J, K, et L les projections orthogonales respectives de A, B, C et D sur les plans $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$. Montrer que les droites $(AI), (BJ), (CK)$ et (DL) sont concourantes si et seulement si :

$$(AB) \perp (CD) \quad (AC) \perp (BD) \quad \text{et} \quad (AD) \perp (BC)$$

    Le point d'intersection de ces quatre droites s'appelle alors **orthocentre** du tétraèdre $(ABCD)$ qui est dit **orthocentrique**.Montrer qu'en fait, il suffit de vérifier les deux premières conditions.
    On pourra au préalable démontrer l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$$

24. Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de l'espace affine euclidien, et r_1, r_2, r_3 les renversements associés. On suppose qu'il existe une droite Δ qui coupe orthogonalement les trois droites, en les points A_1, A_2, A_3. Montrer que $r_{1o}r_{2o}r_3$ est un renversement dont l'axe coupe Δ orthogonalement en un point que l'on précisera.
    On suppose que D_1 n'est pas parallèle à D_2 (ou D_2 non parallèle à D_3) et que $r_{1o}r_{2o}r_3$ est un renversement. Montrer que les trois droites ont une perpendiculaire commune.

25. Rappeler la définition et les propriétés du produit vectoriel Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x :

$$\begin{aligned} \langle a, x\rangle &= \lambda \\ a \wedge x &= b \end{aligned}$$

26. On définit une application f de l'espace dans lui-même par :

$$f(M) = M' \text{ défini par : } \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{OM}$$

    Montrer que f^3 peut s'exprimer à l'aide de f.

27. Étudier les sous-groupes finis de $\mathscr{I}(\mathbb{E})$ lorsque $\mathbb{E}$ est de dimension deux. On passera par les étapes suivantes :

    a) Montrer que si $\mathscr{G}$ est un groupe fini d'isométries, alors les éléments de $\mathscr{G}$ ont un point fixe commun.

    b) Montrer que $\mathscr{G}^+$, formé des déplacements de $\mathscr{G}$ est un sous-groupe d'indice 1 ou 2 de $\mathscr{G}$.

    c) Déterminer tous les sous-groupes finis de $O^+(\mathscr{E})$, par exemple en utilisant les complexes.

    d) En déduire les sous-groupes finis de $\mathscr{I}(\mathbb{E})$, et donner des exemples de figures dont ce sont les stabilisateurs.

28. **Théorème des trois perpendiculaires**
    Démontrer que si $\mathscr{G} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ sont trois ev dans $\mathscr{E}$ euclidien et si f est la projection orthogonale sur $\mathscr{F}$ tandis que g est la projection orthogonale sur $\mathscr{G}$ alors

$$g = g_o f$$

    Justifier le nom du théorème, et donner une formulation plus géométrique

29. **Rotations dans l'espace**
    On est dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et u est un vecteur unitaire.

a) Justifier que l'image d'un vecteur x par la rotation d'axe $\mathbb{R}\ u$ et d'angle θ est donnée par

$$\mathbf{x}' = R(\mathbf{x}) = (1-\cos\theta)\,\langle x, u\rangle\, u + (\sin\theta)\ u \wedge x + (\cos\theta)\ x$$

b) Comment retrouver θ si l'on connait un vecteur et son image ? (non sur l'axe, bien sûr)

c) Justifier :

$$x' = R(x) = x + (\sin\theta)\ u \wedge x + (1-\cos\theta)\, u \wedge (u \wedge x)$$

On sera amené à utiliser la formule du double produit vectoriel :

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$$

que l'on retrouvera.

d) Si on pose $\omega(x) = u \wedge x$, montrer que $\omega^3 = -\omega$ et que

$$R = \exp(\theta\omega)$$

e) On pose $L = \cos\frac{\theta}{2}$; soit (a, b, c) le triplet formé des coordonnées de u relatives à une base orhtonormée directe $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$. Si on définit (A, B, C) par :

$$(A, B, C) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)(a, b, c)$$

expliciter en fonction de (A, B, C, L) la matrice $\mathscr{R}$ de R relative à la base $\mathscr{B}$.

f) On suppose que R n'est pas un demi-tour et on pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$, $v = tu$. Justifier :

$$x' = R(x) = x + \frac{2}{1+|v|^2}\, v \wedge (x + v \wedge x)$$

(formule d'Olinde Rodrigues)

Donner une formule du même type dans le cas d'une symétrie.

g) Si v_1 et v_2 sont les vecteurs associés à deux rotations, calculer le vecteur associé à la rotation composée.

Des frises et d'autres choses

30. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{E}$; une frise est un ensemble $\mathbb{F}$ du plan dont le groupe d'isotropie $\mathscr{G}$ (i.e. le groupe des isométries qui conserve $\mathbb{F}$) est tel que :

$$\mathscr{G} \cap \mathscr{T}(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{Z}$$

où $\mathscr{T}(\mathbb{E})$ est le groupe des translations de $\mathbb{E}$. En clair, les translations de $\mathscr{G}$ sont de la forme $\mathbb{Z}\,\overrightarrow{u}$. On va montrer qu'il y a sept groupes de frises, à « équivalence près ».

Quelques préliminaires

a) Rappeler la nature précise des isométries d'un plan ou d'un espace affine euclidien.

b) Étudier les « transmuées » du type suivant :

$g_o t_o g^{-1}$	où g est quelconque, t une translation.
$g_o s_o g^{-1}$	où g est quelconque, s une réflexion ou une symétrie ou même une projection.
$t_o f_o t^{-1}$	où t est une translation, f une rotation, homothétie, etc. . .

c) Soit r une rotation d'ordre n et s une réflexion dont l'axe passe par le centre de r. Montrer que le groupe engendré par r et s est de cardinal $2n$, en donner les éléments. Montrer également qu'il peut être engendré par s et une autre réflexion σ. On le note $\mathbb{D}_{2n}$.

d) Étudier de même le groupe engendré par deux réflexions d'axes parallèles. Le groupe obtenu est noté $\mathbb{D}_\infty$. En donner d'autres avatars.

Le problème

a) Donner des exemples de frises. On appelle « motif » de la frise un ensemble de points de $\mathbb{F}$ compris entre deux droites orthogonales à $\overrightarrow{u}$ et « distantes » de $\overrightarrow{u}$. On note $\mathbb{M}$ un motif.

b) Montrer que :

$$\mathbb{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mathbb{M} + n\overrightarrow{u}\right)$$

c) Question : si $\mathbb{M}$ est un ensemble de points, est-ce que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mathbb{M} + n\overrightarrow{u}\right)$ est une frise ?

d) Montrer que $\mathscr{G}^+ = \mathscr{G} \cap \mathscr{I}^+(\mathbb{E}) = \langle t_{\vec{u}}\rangle$ ou $\mathscr{G}^+ = \langle t_{\vec{u}}, \sigma\rangle$ où σ est une symétrie centrale. Dans le cas où $\mathscr{G} = \mathscr{G}^+$, on obtient deux premiers groupes de frises ; donner des exemples. (type $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$)

e) On dit qu'une frise est de type $\mathbb{F}_1$ si le groupe de ses déplacements est $\langle t_{\mathbb{Z}\vec{u}}\rangle$. Montrer qu'alors, si une pseudo-symétrie g (de vecteur $\overrightarrow{v}$ et d'axe D) est dans $\mathscr{G}$ alors :
   - Son axe est de direction $\overrightarrow{u}$ ou l'orthogonal de $\overrightarrow{u}$.
   - Dans le second cas, son vecteur est nul : g est une réflexion.
   - Dans le premier cas, soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{Z}\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{G}$ contient la réflexion d'axe D, soit $\overrightarrow{v} \in (\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\overrightarrow{u}$ et $t_{\frac{u}{2}} o \sigma_D \in \mathscr{G}$

   Application : il y a trois groupes de frises de type $\mathbb{F}_1$.

f) Montrer qu'il y a deux groupes de frises de type $\mathbb{F}_2$.

Un petit problème : valeurs singulières

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On dit qu'on a décomposé A en valeurs singulières si on a trouvé une matrice S de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, de la forme $S = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ où D est un bloc diagonal, d'éléments diagonaux positifs rangés dans l'ordre croissant et 0 un bloc de zéros (éventuellement vide).

Existence et unicité de la décomposition

1. On suppose que l'on dispose d'une décomposition comme ci-dessus : que dire de ${}^tAA$?. En déduire les (s_{ii}) en fonction des valeur propres de ${}^tAA$. Montrer que les colonnes (X_i) de Q forment une b.o.n. formée de vecteurs propres pour ${}^tAA$. Soit (Y_i) les colonnes de P ; exprimer AX_i en fonction de Y_i. Les (s_{ii}) ne dépendent que de la matrice A, on les appelle **valeurs singulières** de A.
2. Montrer que A et ${}^tAA$ ont même noyau. En déduire que ces matrices ont même rang (ce rang est noté r). Montrer que le noyau de ${}^tA$ est de dimension $p-r$.
3. En s'inspirant de la première question prouver l'existence de la décomposition en valeurs singulières. Les matrices P et Q sont-elles uniques ?
4.

Agrégation Interne

Géométrie différentielle

Courbes paramétrées - Enveloppes

On appelle *courbe paramétrée* une application $t \mapsto M(t)$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans le plan (l'espace) affine (euclidien). L'image de cette courbe est appelée *trajectoire*, même si on la confond parfois avec la courbe. La tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le premier vecteur dérivé non nul $\frac{d^p}{dt^p}\overrightarrow{M}(t_0)$ non nul (s'il existe).

1. Si $\frac{d^q}{dt^q}\overrightarrow{M}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé indépendant de $\frac{d^p}{dt^p}\overrightarrow{M}(t_0)$, décrire l'allure de la courbe au voisinage de $M(t_0)$ en fonction des parités de p et q. On utilisera la formule de Taylor et un repère adapté.
2. Longueur d'une courbe paramétrée $M(t)$. Si $a < b$ sont deux éléments de I, et si la courbe est de classe C^1, la longueur de la courbe entra les points $M(a)$ et $M(b)$ est donnée par :
$$L(a,b) = \int_a^b \|\overrightarrow{M}'(t)\| dt$$
Ce nombre est indépendant du paramétrage. Si le paramétrage est telle que la vitesse est constante de normée 1, on dit que c'est un paramétrage normal ou paramétrage par longueur d'arc. Ce paramètre est noté s et, pour la courbe $M(t)$:
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
ou de façon plus "synthétique"
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
3. Rectifier la parabole. Peut-on rectifier l'ellipse ?
4. Calculer la longueur d'une chaînette entre deux points. Pour ceux qui l'ignoreraient, on appelle **chaînette** la courbe représentative de la fonction ch (cosinus hyperbolique).
5. Étudier la *cycloïde* définie par :
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$
On utilisera Geogebra et on cherchera son paramètre naturel en fonction de t. ($ds = 2\sin(t/2)dt$).
6. Calculer la longueur de la **cardioïde** $z(t) = 2e^{it} - e^{2it}$. On peut donner une définition géométrique de cette courbe : c'est l'ensemble des projections d'un point d'un cercle sur les tangentes : logiciel, calcul !
7. Rectifier l'astroïde
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$
On étudiera aussi le point de paramètre 0.
8. Soit $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droites d'équations $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$. On dit qu'une courbe $\mathscr{C}$ est une *enveloppe* de cette famille si, pour tout t, $\mathscr{D}_t$ est la tangente en $M(t)$ à $\mathscr{C}$. Montrer qu'on peut se ramener à la résolution d'un système linéaire en $(x(t), y(t))$. Traiter le cas de :
$$3tx - 2y - t^3 = 0$$

9. Une courbe est l'enveloppe de ses tangentes : on appelle *développée* l'enveloppe de ses normales. Déterminer la développée d'une parabole, d'une cycloïde, de l'astroïde.

Courbure d'une courbe plane

1. Soit $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ une fonction vectorielle dérivable. Rappeler comment on dérive le produit scalaire, et montrer que si $\mathbf{v}$ est de norme constante, alors elle est constamment orthogonale à sa dérivée. Interprétation mécanique ?
2. Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. On suppose que le paramètre s est tel que le vecteur vitesse $\overrightarrow{M}'(s)$ est unitaire. On note alors $\mathbf{t}(s)$ ce vecteur et $\mathbf{n}(s)$ le vecteur directement orthogonal. Montrer que $\mathbf{t}'(s)$ peut s'écrire :
$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$
La fonction $s \mapsto \kappa(s)$ s'appelle la *courbure*. Déterminer alors $\mathbf{n}'(s)$.
3. Quelle est la courbure d'un cercle de rayon R ?
4. Dans le cas d'une cycloïde, montrer que le vecteur unitaire tangent a pour coordonnées $(\sin(t/2), \cos(t/2))$. En déduire la courbure.
5. Déterminer la courbure d'un cercle, d'une parabole, d'une cycloïde. On pourra vérifier que $\kappa(s) = \det(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{t})$ et donc que
$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$
6. Point de vue local : on suppose que la courbe paramétrée est donnée par $x = t, y = y(t)$ et que $y(0) = y'(0) = 0$. Que cela veut-il dire pour la courbe ? Calculer la courbure au point 0..
7. On note K le point défini par : $K(s) = M(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, on l'appelle *centre de courbure* au point de paramètre s. Montrer que la développée est l'ensemble des centres de courbure. On pourra chercher la développée en posant $P(s) = M(s) + \lambda(s)\mathbf{n}(s)$.
8. Montrer que le cercle de centre $K(s)$ passant par $M(s)$ est la position limite d'un cercle passant par $M(s_1)$, $M(s_2)$ et $M(s_3)$ lorsque s_1, s_2 et s_3 tendent vers s. Comment définir le rayon de courbure ?
9. Démontrer qu'une courbe dont la courbure est constante nulle est une droite.

Coniques

La parabole

Soit F un point sur Ox , $\mathscr{D}$ une parallèle à Oy. Si M est un point du plan, on notera H la projection de M sur $\mathscr{D}$. On s'intéresse à l'ensemble
$$\mathscr{E} = \{M(x, y) \mid MF = MH\}$$

1. En supposant que O est équidistant de $\mathscr{D}$ et de F, montrer qu'une équation de $\mathscr{P}$ est
$$y^2 = 2px$$
On donnera la signification de p.
2. Soit q une forme quadratique, ℓ une forme linéaire, k une constante, montrer que, lorsque q est de rang 1, l'équation
$$q(x, y) + \ell(x, y) + k = 0$$
représente une parabole (éventuellement dégénérée).
3. Donner la description géométrique de la tangente en un point : application aux fours solaires.
4. Aire d'un "segment" de parabole ?

L'ellipse monofocale

Soit $0 < e < 1$, F un point sur Ox , $\mathscr{D}$ une parallèle à Oy. Si M est un point du plan, on notera H la projection de M sur $\mathscr{D}$. On s'intéresse à l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{M(x,y) \mid \frac{MF}{MH} = e\}$$

1. Montrer qu'il existe deux points solutions sur Ox, que l'on nommera A et A' (utiliser la notion de barycentre)
2. Prendre pour origine O, milieu de $[AA']$. On posera $OA = OA' = a$ et $OF = c$. Déterminer e en fonction de a et c puis déterminer l'équation de $\mathscr{D}$, puis une équation cartésienne de $\mathscr{E}$.
3. Montrer qu'il existe un deuxième foyer F' et une deuxième directrice.
4. Montrer que l'ellipse est caractérisée par $MF + MF' = 2a$.
5. Que se passe t-il si $e > 1$?
6. Quelle est la tangente à une ellipse ?
7. On considère le cercle de centre F' et de rayon $2a$. Il s'appelle cercle directeur de l'ellipse. Utiliser ce cercle pour tracer la tangente en un point M à l'ellipse.
8. En déduire la construction des tangentes menées d'un point P à l'ellipse.

Coniques et théorème spectral

On se place dans un plan affine euclidien et on considère une forme quadratique q, une forme linéaire ℓ et une constante b. On appelle **conique** l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé (O, i, j) défini par :

$$F(M) = F(x, y) = q(x, y) + \ell(x, y) + b = 0$$

où $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

1. Que devient l'expression de $F(M)$ quand on change de coordonnées ?
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, e_2) telle que l'équation de la conique prenne la forme :
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$$
3. Montrer que, si la forme quadratique q est non dégénérée, il existe un repère telle que l'équation de la conique prenne la forme :
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + b' = 0$$
On dit qu'il s'agit d'une conique à centre.
4. Déterminer l'allure des coniques à centre.

Encore l'ellipse

1. Théorèmes d'Appolonius (Ramis-Warusfel). Soit E le plan euclidien, et q la forme quadratique définie par :
$$q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$
et l'ellipse d'équation $q(x, y) = 1$.
   a) Établir que l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de l'ellipse est :
$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$$

b) On dit que deux droites passant par l'origine sont conjuguées si l'une coupe l'ellipse en deux points où les tangentes sont parallèles à l'autre. Montrer que deux droites sont conjuguées si elles sont orthogonales pour ϕ, la forme bilinéaire associée à q.

c) Montrer que si A_1 et A_2 sont deux points de l'ellipse tels que (OA_1) et (OA_2) sont conjugués, alors :

$$OA_1^2 + OA_2^2 = a^2 + b^2, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = ab$$

Si B_1 et B_2 sont deux points de l'ellipse tels que OB_1 et $Ob2$ sont orthogonaux (pour le structure euclidienne...) alors :

$$\frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OB_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Courbes telles que...

On va s'intéresser maintenant à la recherche de certaines courbes ayant une propriété géométrique imposée. Les propriétés que nous étudierons feront intervenir des tangentes, et conduiront à montrer que les courbes solutions seront, au moins localement, les courbes intégrales d'une équation différentielle. Traditionnellement, on appelle ce genre d'exercice «recherche des courbes telles que...».

Le contexte général sera : $\mathscr{C}$ est courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on recherche la fonction f. On notera M un point quelconque de la courbe $\mathscr{C}$ et x son abscisse.

1. On appelle **sous-tangente** la longueur de mT où m est la projection orthogonale de M sur Ox et T l'intersection de la tangente en M avec Ox. Rechercher les courbes telles que :
   – La sous-tangente est constante.
   – La sous-normale est constante (il est entendu qu'on s'efforcera de deviner ce que signifie «sous-normale»).
   – La sous-tangente est égale à la sous-normale.
2. Soit $\mathscr{C}$ une courbe. On suppose que la tangente en tout point M recoupe l'axe Ox en un point N tel que $ON = MN$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la fonction que $\mathscr{S}$ représente. Vérifier que cette équation est homogène et la résoudre. On obtiendra une représentation paramétrique et l'on reconnaîtra les courbes solutions.
3. Soit $\mathscr{T}$ une courbe. On suppose, avec les notations de la question précédente, que MN est constant. Pourquoi cette courbe s'appelle-t-elle **courbe du chien** ou **tractrice** ? Écrire l'équation différentielle correspondante et étudier une des courbes solutions.

Courbes et transformation

Encore une petite variation sur les courbes paramétrées.

1. Chercher l'image par l'inversion[3] de centre O et de rapport 1, de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Préciser le cas où les sommets de l'hyperbole sont invariants.
2. Soit f l'application du plan privé de l'origine dans lui-même dont la représentation complexe est $\overline{f}(z) = \frac{1}{z}$. Déterminer par leurs représentations paramétriques les images des paraboles d'équations $y = ax^2$. Tracer quelques-unes de ces courbes.
3. Soit $\mathscr{C}_k$ la ligne de niveau k de l'application $\phi(M) = MA \times MB$, où A et B sont deux points distincts. Déterminer cette ligne (on parle d'une **Ovale de Cassini**). Tracer après étude la ligne qui contient le milieu de AB : elle porte le nom de **lemniscate de Bernoulli**. Déterminer les images des lignes de niveau par l'application f de la question précédente.

Quadrique

1. Rendre à chacune des quadriques son équation :

$$\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 & x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x^2 - y^2 - 2z = 0 & \end{array}$$

2. Montrer que si $P(x, y, z)$ est un polynôme de degré 2, la quadrique $P(x, y, z) = 0$ admet un axe de révolution. Réciproque ?
3. Nature des quadriques :

$$\begin{aligned} xy + xz + yz + 2y + 1 &= 0 \\ x^2 + (2\lambda^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda zx + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz &= 0 \end{aligned}$$

4. Montrer que l'ensemble des points équidistants de deux droites non coplanaires est un paraboloïde hyperbolique équilatère. Réciproque ?

3. Voir le chapitre sur les cercles

6 Exemples d'exposés

107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.

Prérequis : espaces vectoriels, familles libres, liées, génératrices. Le corps de base est noté **K**.

1. Espace vectoriel de dimension finie

1.1. Définition

définition 1 On dit qu'un K-espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il existe une famille génératrice de E qui est finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.
Exemples : $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}_n[X]$, L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. L'espace $\{0\}$.
proposition 1. Si E est de dimension finie et si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice, alors il existe une sous-famille finie extraite de $\mathscr{G}$ qui est également génératrice de E.

1.2. Bases

définition 2 Une base d'un espace vectoriel E est une famille qui est à la fois libre et génératrice.
Exemples : bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{R}_n[X]$....Attention, l'espace $\{0\}$ n'a pas de base.
proposition 2 Si $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i$$

où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires presque tous nuls, appelés coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
Remarque C'est une propriété caractéristique.

1.3. Théorème de la base incomplète Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E, $\mathscr{L}$ une famille libre et finie de E. Alors il existe une sous-famille finie G extraite de $\mathscr{G}$ telle que $\mathscr{L} \cup G$ soit une base de E.
Corollaire Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base ayant un nombre fini d'éléments.
Remarque : on peu montrer que tout espace vectoriel admet une base, même s'il n'est pas de dimension finie.

1.4 Lemme fondamental

lemme Soit F un espace vectoriel engendré par k vecteurs $g_1, g_2, \dots g_k$. Alors toute famille de $k+1$ vecteurs est liée.

1.5. Théorème de la dimension

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul. Alors :

i Toutes les bases ont le même nombre n d'éléments.

ii Toute partie libre a au plus n éléments, et si elle en a exactement n, c'est une base.

iii Toute partie génératrice a au moins n éléments, et si elle en a exactement n, c'est une base.

définition Si E est de dimension finie, le cardinal d'une base de E s'appelle la dimension de E. Si E est réduit à $\{0\}$, on convient que la dimension est 0. On la note $\dim E$ ou $\dim_K E$.
Exemple

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

proposition 3 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie E. Alors :

$$\dim F \leqslant \dim E \text{ et } \dim F = \dim E \Rightarrow F = E$$

proposition 4 Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie admet un sous-espace supplémentaire.

2. Rang d'une famille de vecteurs

2.1 Définition

définition Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille finie d'un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace de E engendré par $\mathscr{F}$. On note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$.
proposition 5

1. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \inf(k, \dim E)$
2. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = k \iff \mathscr{F}$ est libre.

2.2 Méthode du pivot définition

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$ une base de E. Si $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs, on appelle matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, le tableau (matrice) A dont l'élément $a_{i,j}$ de la i-ème ligne et de la j-ième colonne est la j-ème coordonnée du vecteur x_i. Le rang de la matrice A est alors par définition le rang de la famille $\mathscr{F}$.

proposition 6 Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A ne changent pas son rang.

Soit L une matrice ligne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La largeur $l(L)$ est l'entier ℓ tel que :

$$\begin{cases} L_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n-\ell \\ L_{n-\ell+1} \neq 0 \end{cases}$$

Si la ligne est nulle, on dira que sa largeur est nulle. Le coefficient $L_{n-\ell+1}$ s'appelle le pivot de la ligne. On dit qu'une matrice de p lignes L_1, L_2,..., L_p est **échelonnée** si l'on a :

$$l(L_1) > l(L_2) > \ldots > l(L_k)$$

pour un certain k inférieur à p, les lignes suivantes étant nulles.

proposition 7 Le rang d'une matrice échelonnée en ligne est le nombre de ses pivots.

proposition 8 Par opérations élémentaires sur les lignes, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée.

On dispose ainsi d'un procédé algorithmique pour déterminer le rang d'un système de vecteurs.

Réf. par exemple éditions pearson, L1 ?

162 Rang d'une matrice ; déterminations, algorithmes de calcul.

Prérequis : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices. Le corps de base est noté **K**.

1. Rang d'une matrice

1.1. Définition, exemples

définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On note $C_1, C_2, \dots C_p$ ses colonnes, considérées comme éléments $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de A la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les C_i. On le note $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 85 $\mathrm{rg}(A) \leqslant \inf(n,p)$

Exemple : le rang d'une matrice ligne (rep. colonne) non nulle est 1.
Exemple : soit (a_i) et (b_j) deux suites finies. Quel est le rang de la matrice $(a_i b_j)$?
Exemple : Montrer que le rang de la matrice suivante est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un premier théorème :

Théorème 86 *On ne change pas le rang d'une matrice si on la multiplie par une matrice inversible.*

opérations élémentaires sur les colonnes On appelle opération élémentaire de transvection sur les colonnes d'une matrice A le passage de $A = (C_1, C_2, ..., C_n)$ à une matrice A' où la colonne C_i a été remplacée par la colonne $C_i + \lambda C_j$ où j est différent de i et λ un scalaire quelconque. De même une dilatation sur les colonnes correspond au remplacement de C_i par λC_i où λ est un scalaire non nul. Enfin, une opération élémentaire d'échange et le passage de A à A' où la colonne i a été échangé avec la colonne j, j étant différent de i.

Proposition 87 *Une succession d'opérations élémentaires sur les colonnes ne change pas le rang d'une matrice.*

démonstration immédiate.

On dispose donc d'une première méthode, qui sera davantage détaillée, pour déterminer le rang d'une matrice, il s'agit de faire apparaître suffisamment de termes nuls pour se ramener à un cas facile comme celui de l'exemple.

Il est possible de définir de la même façon des opérations élémentaires sur les lignes et on a, de la même façon :

Proposition 88 *Une succession d'opérations élémentaires sur les lignes ne change pas le rang d'une matrice.*

Une remarque : pourquoi lors de la résolution d'un système privilégie t-on les opérations sur les lignes et, dans le cas du calcul du rang privilégie t-on les opérations sur les colonnes ?

2. Rang et matrices équivalentes

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$Q^{-1}AP$$

Théorème 89 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

On donne une démonstration « géométrique », en montrant qu'une matrice de rang r est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où 0 représente soit un bloc vide soit un bloc formé de zéros.

Un corollaire fondamental :

Corollaire 90 *Une matrice et sa transposée ont même rang.*

Exercice 1 *Montrer que l'ensemble des matrices réelles de rang r est connexe par arc*

3. Rang et sous-matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice et $I \subset [\![1,\dots,n]\!]$, et $J =\subset [\![1,\dots,p]\!]$ non vides. On appelle sous-matrice de A ou matrice extraite de A et on note $A_{I,J}$ la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ où i parcourt l'ensemble I et j parcourt l'ensemble J dans l'ordre croissant. On dispose alors de la proposition :

Proposition 91 *A est de rang r s'il existe une matrice extraite de dimensions $r \times r$ inversible et si aucune matrice extraite de dimension $r+1 \times r+1$ n'est inversible.*

.

Cette proposition peut être affinée : on appelle matrice bordante de la matrice $A_{I,J}$ une matrice extraite de la forme $A_{I\cup\{i\},J\cup\{j\}}$ où i et j sont pris en dehors de I et J.

Proposition 92 *A est de rang r s'il existe une matrice extraite de dimensions $r \times r$ inversible et si aucune matrice bordante n'est inversible.*

.

Ces proposition n'ont pas une grande importance algorithmique, mais jouent un rôle théorique.

Corollaire 93 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a pour rang r et si L est une extension de $\mathbb{K}$, alors le rang de A considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore r.*

Exercice 2 *Soit A une matrice carrée et $\tilde{A}$ sa comatrice. Déterminer le rang de $\tilde{A}$ en fonction du rang de A. Dans le cas où A n'est pas inversible, montrer que :*

$$A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1} = 0$$

(identité de Sylvester, dans un cas particulier, cf. Cognet p. 159).

4. Algorithme du pivot Il s'agit de systématiser ce qui a été énoncé plus haut.

Proposition 94 *Toute opération élémentaire sur les lignes (resp. sur les colonnes) revient à prémultiplier (resp. postmultiplier) par des matrices de transvections (de déterminant 1) ou des matrices de dilatation (de détermiant λ, coefficient de la dilatation.*

La démonstration peut se faire "visuellement" ou en utilisant les matrices élémentaires. Remarquer également :

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \mapsto & L_1+L_2 & \mapsto & L_1+L_2 & \mapsto & L_2 \\ L_2 & \mapsto L_2 & \mapsto & -L_1 & \mapsto & -L_1 & \end{array}$$

Si on s'intéresse seulement au rang de la matrice A, on peut commencer par le lemme :

Lemme 95 *Si B est une matrice-bloc de la forme $B = \begin{pmatrix} \alpha & xxx \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ alors $\operatorname{rg} B = 1 + \operatorname{rg} B'$.*

Description non formalisée de l'algorithme pour une matrice carrée A :

1. Si A est nulle, son rang est nul.
2. Sinon ; A possède un coefficient non nul α que l'on peut placer en position $1,1$ par permutation éventuelle de ligne et colonnes.
3. Par transformations élémentaires $L_i^{(1)} \mapsto L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1^{(1)}$, on fait apparaître des 0 en-dessous du « pivot » α. On obtient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & xxx \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$.
4. On reprend au début avec la matrice A'.

Enfin, le nombre des opérations de cette méthode est $O(n^3)$.

Une application :

Théorème 96 *Le groupe $SL_n - \mathbb{K}$ est engendré par les transvections. Le groupe linéaire est engendré par les transvections et les dilatations.*

Questions

1. Montrer qu'une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de rang strictement inférieur à n est semblable à une matrice nilpotente. Application : si f est une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ non constante telle que
$$f(AB) = f(A)f(B)$$
alors A est inversible si et seulement si $f(A)$ est non nul. (coignet)
2. Est-ce que deux matrices semblables ont même rang ?
3. Rang de $X^tY + X'^tY'$ où X, X', Y, Y' sont des matrices colonnes (coignet p. 192)
4. Montrer que $\mathrm{rg}^t AA = \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t A$. Application aux matrices de Gram.
5. Rang de la matrice $A = (a_{ij})$ où $a_{ii} = a$, $a_{i+1,j} = b$, $a_{n1} = b$, les autres étant nuls.
6. Montrer qu'une application linéaire de rang 1 est de la forme $f(x) = \phi(x)a$ où ϕ est une forme linéaire non nul et a un vecteur non nul. Unicité ? Que dire des matrices de rang 1 ?
7. Montrer que toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles : on se ramènera à une matrice équivalente.
8. Dans l'anneau des matrices carrées $\mathscr{M}_\backslash(\mathbb{K})$, montrer que M est un diviseur de zéro (à droite, à gauche) ssi elle est de rang $< n$. Peut-on avoir le même diviseur de zéro associé ?
9. Montrer que l'ensemble des matrices carrés réelles de rang $r < n$ est connexe par arcs. On pourra admettre que $\mathbf{GL}^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

150 Factorisations de matrices

Prérequis : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices.

1. Matrices équivalentes, matrices semblables

1.1. Matrices équivalentes.

définition. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont semblables s'il existe une matrice P de $\mathbf{GL}(n,\mathbf{K})$ telles que $A = PBQ$. **Proposition 1**

Toute matrice est équivalente à une matrice J_r où $r \leqslant \inf(n,p)$. J_r est la matrice-bloc

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 représentant une matrice nulle ou vide. Le nombre r est le rang de la matrice, il ne dépend pas de la décomposition, qui n'est pas unique.
démonstration "géométrique" ou "algorithmique".

1.2. Matrices semblables

définition. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe P inversible telle que $\boxed{B = P^{-1}AP}$ A et B représentent donc le même endomorphisme dans des bases différentes. Une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
théorème 2. Toute matrice annulée par un polynôme scindé simple est diagonalisable. Toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. **Remarque.** Ces factorisations sont utilisées par exemple pour calculer l'exponentielle d'une matrice. Elles ne sont pas toujours faciles à mettre en œuvre sur le plan algorithmique.

1.3. Cas des matrices symétriques réelles.

2. Factorisation issues de la méthode du pivot

Ces décompositions sont utiles pour résoudre des systèmes linéaires de façon économique lorsque le nombre des équations et des inconnues est élevé. En effet, le "coût" de la résolution d'un système échelonné est faible.

2.1. Factorisation LU

Définition On dit qu'une matrice carrée inversible A admet une factorisation LU si elle se peut écrire : $\boxed{A = LU}$ où L est triangulaire inférieure, la diagonale ne contenant que des 1 et U est une matrice triangulaire supérieure, la diagonale étant formée d'éléments non nuls.
théorème 3. Notons $A_{(p)}$ la matrice carrée égale à $(a_{i,j})_{i\leqslant p, j\leqslant p}$. A admet une décomposition LU si et seulement si $\det A_p \neq 0$ pour tout $p = 1..n$.
dém. Par récurrence sur la taille de la matrice.
rem. évaluation du coût de l'algorithme :

2.2. Factorisation de Bruhat.

théorème 4. Toute matrice inversible A peut s'écrire, de façon unique : $\boxed{A = TP_\sigma T'}$ où T est triangulaire supérieure unipotente, P_σ est une matrice de permutation, T est triangulaire supérieure. Cela donne donc une partition de $\mathbf{GL}(n,\mathbf{K})$.

Exercice : si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, alors la classe correspondante est ouverte et dense, en bijection avec l'ensemble des matrices admettant une décomposition LU. **2.3. Factorisation de Choleski**
Toute matrice symétrique définie positive S peut s'écrire comme produit $\boxed{S = L^tL}$ où L est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Il y a unicité de cette décomposition.

3. Décomposition polaire, factorisation QR

La décomposition polaire est une généralisation des coordonnées polaires d'un point du plan, ou des l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe : tout complexe non nul s'écrit de façon unique comme le produit d'un réel strictement positif (le module) et d'un complexe de module 1.

3.1. Décomposition polaire d'une matrice inversible réelle

théorème 5. Soit A une matrice inversible réelle. Il existe un unique couple (O,S) où $O \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ et $S \in \mathbb{S}_n^{++}$ tel que $\boxed{A = OS}$ dém. On commence par prouver l'existence d'une unique racine carrée symétrique définie positive d'une matrice symétrique définie positive.

rem1. La décomposition subsiste si A est carrée non inversible. Il n'y a plus unicité de O. rem2. Il existe une décomposition polaire $A = S'O'$. rem3. Il n'y a pas de remarque 3 **3.2. Cas complexe**

3.3. Factorisation QR

théorème 6. Toute matrice A de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ peut s'écrire de façon unique $\boxed{A = \Omega T}$ où Ω est orthogo-

nale et T triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. C'est la traduction matricielle de l'algorithme de Gram-Schmidt.	**3.4. Factorisation QR par les matrices de Householder** à suivre ref. Exercices de maths X-ENS, (francinou) (tome	1 pour Bruhat, tome 2 pour LU, cassini), Matrices (denis serre) (dunod), Mneimné-Testard (groupes et algèbres de Lie)

Questions

1. Géométriquement, que dire de l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients tous positifs d'une famille de vecteurs ?
2. Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit ?
3. Quel est le centre de gravité d'un triangle ? (considéré comme polygone)
4. Quel est le centre de gravité d'un triangle ? (considéré comme une plaque homogène)
5. Soit $| \, .\|$ une norme dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(A, B) \mapsto AB$ est continue de $E \times E$ dans E. En utilisant la continuité en 0, montrer qu'il existe K tel que :

$$\|AB\| \leqslant K\|A\|\,\|B\|$$

6. Montrer que si $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la norme définie par :

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

   où X est une colonne, est bien une norme (...), et vérifie :

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

   On dit que c'est une norme subordonnée.
7. Faire la décomposition LU pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (lorsqu'elle existe)
8. Faire la décomposition de Bruhat pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (elle existe toujours)
9. Montrer l'unicité dans la décomposition LU.
10. Montrer l'unicité dans la décomposition de Choleski.
11. Faire la décomposition de Choleski pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

12. Étudier la décomposition polaire pour une matrice non inversible.

155 Systèmes linéaires

Prérequis : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants. Le corps de base est noté **K**.

1. Interprétation géométrique

1.1. Systèmes linéaires.

définition. Un système linéaire $\mathscr{S}$ d'inconnues $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ est un système d'équations :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{p,1}x_1+a_{p,2}x_2+\ldots+a_{p,n}x_n=b_p\end{cases}$$

où les $(a_{i,j})$ et les (b_i) sont des scalaires donnés. Une **solution** du système est un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que les égalités ci-dessus soient simultanément satisfaites.

$A=(a_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ s'appelle **matrice** du système. Le système est dit **homogène** si le second membre est nul (tous les b_i sont nuls). Il est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Le rang de la matrice A s'appelle **rang** du système.

1.2 Interprétations

On peut interpréter la matrice A comme celle d'une application linéaire f de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, par rapport aux bases canoniques. Si $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\end{pmatrix}$ est la matrice d'un élément b de $\mathbb{K}^p$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ est celle d'un vecteur x de $\mathbb{K}^n$, résoudre le système linéaire $AX=B$ équivaut à rechercher tous les vecteurs x tel que $f(x)=b$.

Il est parfois intéressant de faire d'autres interprétations : un système homogène est la recherche d'une relation de liaison entre les vecteurs colonnes. C'est aussi l'étude de l'intersection d'hyperplans (affines dans le cas non homogène).

1.3. Théorème principal

théorème 1. L'ensemble des solutions d'un système affine $AX=B$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$. Plus précisément :

- Si $b\notin \mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des solutions est vide.
- Si $b\in\mathrm{Im}(f)$ et si $x_0=f(b)$, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des vecteurs du sous-espace affine passant par x_0 de direction $\mathrm{Ker}\, f$. Ce sous espace affine est de dimension $n-\mathrm{rang}(\mathscr{S})$.

Exemple : Solutions d'un système homogène de $n-1$ équations à n inconnues et de rang $n-1$. Condition d'alignement de trois points du plan.

2. Méthodes théoriques

2.1. Système de Cramer Un système de Cramer $\mathscr{S}$ est un système $n\times n$, de rang n.

Théorème 97 *Un système de Cramer admet une unique solution donnée par*

$$\forall i\in\{1,..,n\},\ x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$$

où $\Delta=\det A$ et Δ_i est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplacant la i-ème colonne de A par la matrice B des seconds membres.

exemple : systèmes 2×2.

2.2. Autres systèmes. Théorème de Rouché-Fontené. Rappelons le lemme :

Lemme 98 *Une matrice est de rang r si et seulement si : il existe une sous-matrice d'ordre r qui est inversible et aucune matrice bordante n'est inversible.*

On peut supposer, quitte à renuméroter les équations et les inconnues que cette matrice est la matrice extraite principale d'ordre r. Les r premières inconnues sont appelées **inconnues pricipales** et les autres **inconnues secondaires**. Les r premières équations sont les équations principales. Notons A_r la matrice extraite correspondante.

Avec ces conventions, on peut alors énoncer :

Théorème 99 *Le système est alors compatible si et seulement si les $n-r$ déterminants-blocs suivants* *sont nuls :*

$$\left|\begin{array}{cccc|}
 & & & b_1 \\
 & A_r & & b_2 \\
 & & & \vdots \\
 & & & b_r \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots \; a_{i,r} & b_i
\end{array}\right.$$

Puis enfin

Théorème 100 *Si alors le système est compatible, on obtient toutes les solutions en donnant des valeurs qualconques aux inconnues secondaires et en écrivant chaque équation principale sous la forme :*

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,r}x_r = bi - (a_{i,r+1}x_{r+1} + \ldots a_{i,n}x_n)$$

Remarque : c'est un système de Cramer, on a ainsi une représentation paramétrique de l'espace affine des solution.

3. Méthode de Pivot

L'idée de ces méthodes est la suivante : quand la matrice d'un système linéaire est triangulaire supérieure ou échelonnée, la résolution du système est immédiate (elle se fait en n étapes). On se place dans le cas où le système est carré et la matrice du système est inversible. Tout repose sur :

Proposition 101 *Soit* (S) *un système de matrice* A*. Toute opération élémentaire sur les lignes de* A *donne un système équivalent à* (S)*.*

3.1. Description de l'algorithme du pivot On procède en plusieurs étapes :

1. Par permutation éventuelle de ligne, on obtient un système où $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
2. Par transformation élémentaires $L_i^{(1)} \mapsto L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, on fait disparaître l'inconnue x_1 des équations 2 à n. Par permutation éventuelle de ligne, on obtient un système équivalent de matrice $A^{(2)}$, avec $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
3. On reprend l'étape 2 pour les équations de 2 à n, puis de 3 à n jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Remarques : les hypothèses permettent de voir qu'il y a toujours un élément non nul qui peut servir de pivot. On a "intérêt" à prendre un pivot le plus grand possible. Enfin, le nombre des opérations de cette méthode est $O(n^3)$.

Remarques : - si on pivote à nouveau en remontant, on peut transformer A en une matrice diagonale, toujours par opérations sur les lignes.
- il est possible, dans le cas où les coefficients sont entiers, de faire des transfomations du type $L_i^{(1)} \mapsto a_{11}^{(1)} L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(1)}$, pour éviter les rationnels (dans l'échelonnage).

Exemple : inversion d'une matrice par la méthode du pivot, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. Pivot dans le cas général Commençons par définir une matrice échelonnée. Soit L une matrice ligne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La largeur $l(L)$ et l'entier ℓ tel que :

$$\begin{cases} L_i = 0 \text{ pour tout } i \leqslant n - \ell \\ L_{n-\ell+1} \neq 0 \end{cases}$$

Si la ligne est nulle, on dira que sa largeur est nulle. Le coefficient $L_{n-\ell+1}$ s'appelle le pivot de la ligne. On dit qu'une matrice de p lignes L_1, L_2,..., L_p est **échelonnée** si l'on a :

$$l(L_1) > l(L_2) > \ldots > l(L_k)$$

pour un certain k inférieur à p, les lignes suivantes étant nulles.

Proposition 102 *Par opérations élémentaires sur les lignes, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée.*

Il suffit d'appliquer la méthode du pivot de Gauss, en précisant que s'il n'y a pas de "pivot" à une certaine étape, on passe à l'étape suivante.

Dans certains cas, il est utile de simplifier encore davantage le système obtenu par des opérations élémentaires sur les colonnes.

Exemple : ...

3.3. Décomposition LU d'une matrice inversible L'idée est d'observer le cas particulier de la méthode du pivot pour lequel il n'y a aucun échange de ligne à faire.

Lemme 103 *Si tous les mineurs principaux de la matrice* A *sont différents de* 0*, la méthode du pivot de Gauss ne conduit à aucun échange de ligne.*

On en déduit le théorème

Théorème 104 *Pour une matrice A vérifiant les hypothèses précédentes, il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que*

$$A = LU$$

La résolution d'un système de matrice A se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires successifs. De plus, la matrice L et la matrice U peuvent être obtenue rapidement. Il y a unicité si on impose à la diagonale de L d'être formée de 1.

4. Méthodes itératives, conditionnement

4.1. Une méthode itérative L'idée est de se ramener à un point fixe. On doit résoudre un système $AX = B$ et on suppose que l'on a écrit A sous la forme $A = M - N$ où M est facilement inversible.

Théorème 105 *Soit (X_n) la suite de vecteurs définie par la relation :*

$$X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}B$$

avec un premier terme X_0 quelconque. Alors, si le rayon spectral de $M^{-1}N$ est strictement inférieur à 1, *cette suite converge vers une solution du système.*

4.2. Notion de conditionnement Il importe de tenir compte, quelque soit l'algorithme, des erreurs dues aux approximations. Limitons nous aux questions suivantes : si X est solution de $AX = B$ et si B' est une matrice proche de B que dire de la solution de $AX = B'$? De même, si A' est une matrice proche de A que dire de la solution de $A'X = B$?

Théorème 106 *Si $\|.\|$ est une norme subordonnée, on a :*

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X\|} \leqslant \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|B' - B\|}{\|B\|}$$

si l'on a perturbé B et

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X'\|} \leqslant \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|A' - A\|}{\|A\|}$$

Le produit $\|A\|\,\|A^{-1}\|$ s'appelle **conditionnement** de la matrice A. On voit facilement qu'il est supérieur à 1 et s'il est grand, on dit que la matrice A est mal conditionnée.

Vocabulaire

1. Matrice extraite d'une matrice A. On considére un sous-ensemble $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ de l'ensemble des numéros de lignes (rangés dans l'ordre et $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ de l'ensemble des indices de colonnes. On note $A_{I,J}$ la matrice $s \times k$ formées des (a_{i_h, j_ℓ}). pour $h = 1..s$ et $\ell = 1..k$. Si une matrice extraite est carrée, son déterminant s'appelle un **mineur** de A. Un cas particulier, si $I = \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ et $J = \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}$, la matrice extraite sera notée $A_{i,j}$; si elle est carrée (donc si A est carrée), le nombre $(-1)^{i+j} \det A_{i,j}$ s'appelle le **cofacteur** de $a_{i,j}$.
2. Dans le cas particulier où A est carrée et que $I = J = \{1, ..., k\}$, on parle de matrice extraite **principale** et de **mineur pricipal**.
3. Une matrice **bordante** d'une matrice extraite $A_{I,J}$ est une matrice extraite $A_{I',J'}$ où $I' = I \cup \{i\}$ avec $i \notin I$, de même pour J'.
4. Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit ?
5. Quel est le centre de gravité d'un triangle ? (considéré comme polygone)
6. Quel est le centre de gravité d'un triangle ? (considéré comme une plaque homogène)
7. Soit $| .\|$ une norme dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(A, B) \mapsto AB$ est continue de $E \times E$ dans E. En utilisant la continuité en 0, montrer qu'il existe K tel que :

$$\|AB\| \leqslant K\|A\|\,\|B\|$$

8. Montrer que si $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la norme définie par :

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

   où X est une colonne, est bien une norme (...), et vérifie :

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

   On dit que c'est une norme subordonnée.
9. Faire la décomposition LU pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (lorsqu'elle existe)
10. Faire la décomposition de Bruhat pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (elle existe toujours)
11. Montrer l'unicité dans la décomposition LU.
12. Montrer l'unicité dans la décomposition de Choleski.
13. Faire la décomposition de Choleski pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

14. Étudier la décomposition polaire pour une matrice non inversible.

128 Barycentres, applications

Prérequis : espaces vectoriels, espaces affines. Dans la suite, E désigne un espace affine.

1. Barycentre d'un système de points pondérés

1.1. Définition

Un **système de points pondérés** $\mathscr{S}$ est une suite finie de k couples (A_i, λ_i) où $A_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$; λ_i est le coefficient ou le poids de A_i. Le nombre $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ s'appelle le poids total du système.

proposition 1
Si le poids total du système est non nul, il existe un seul point G de E tel que : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Ce point s'appelle **barycentre** du système, on peut le noter

$$G = \mathrm{bar}(\mathscr{S}) = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1..k}$$

Exemple : construire le barycentre d'un système de deux points distincts.

proposition 2
Si $\mathscr{S}$ est un système de poids total non nul, G est barycentre de $\mathscr{S}$ si et seulement si, pour tout M de E :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}$$

remarque 1 Lorsque le poids total est nul, le premier membre de cete égalité est un vecteur constant, indépendant de M.

corollaire En prenant $M = O$, origine d'un repère, la proposition permet de calculer les coordonnées du barycentre.

1.2.propriétés

proposition 3
Le barycentre est invariant lorsqu'on multiplie les poids par une constante non nulle.

proposition 4(associativité)
Soit $\mathscr{S}$ un système de poids total non nul et de barycentre G. Si $I_1 \cup I_2$ est une partition de $\{1,2,\ldots,k\}$ telle que $\sum_{i \in I_1} \lambda_i = \mu_1 \neq 0$, $\sum_{i \in I_2} \lambda_i = \mu_2 \neq 0$ alors, en posant $G_1 = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I_1}$ et $G_2 = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I_2}$, on a

$$G = \mathtt{bar}(G_1, \mu_1)(G_2, \mu_2)$$

Application : construire le barycentre de trois points. Cas particulier de l'isobarycentre (cas où tous les poids sont égaux).

proposition 5
Le barycentre d'un système $\mathscr{S}$ est un point du sous-espace affine engendré par $\mathscr{S}$. Réciproquement, tout point de ce sous-espace affine est barycentre des points de $\mathscr{S}$. Si les points de $\mathscr{S}$ sont affinement indépendants, il y a unicité des coefficients, à multiplication par un scalaire non nul près. On dit que ce sont des coordonnées barycentriques de ce point.

proposition 6
Une application de E dans E est affine si et seulement si l'image du barycentre d'un système est le barycentre des images, avec les mêmes coefficients.

2. Applications

2.1. Le barycentre en géométrie affine

Exercices : 1.Déterminer les coordonnées barycentriques des points O, G, H, I d'un triangle ABC (centre du cercle circonscrit, centre de gravité, orthocentre, centre du cercle inscrit).
2.Lieu des points du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$.

2.2. Les convexes

définition Un sous ensemble C d'un espace affine E est **convexe** s'il vérifie :

$$\forall (M,N) \in C^2,\ [MN] \subset C$$

proposition L'intersection de convexes est un convexe.
On en déduit que si X est un sous-ensemble de E, il existe un plus petit convexe contenant X : c'est l'enveloppe convexe de X, notée $\Gamma(X)$.
théorème L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des systèmes de points de X dont les poids sont tous positifs.

2.3. Propriétés des convexes

Exercices : Si C est un convexe, alors son intérieur et son adhérence sont convexe.
Soit C_1 et C_2 deux convexes. On définit l'ensemble $m(C_1, C_2)$ par
$m(C_1, C_2) = \{M \in E \mid \exists (M_1, M_2) \in C_1 \times C_2,\ M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\}$.
Décrire cet ensemble lorsque C_1 et C_2 sont des segments, lorsque C_1 est un cercle et C_2 un segment.
Montrer que c'est un convexe.

339 Exemple d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

Prérequis : espaces affines euclidien, isométries en dimension 2 et 3. Dans la suite, E désigne un espace affine de dimension 2 ou 3.

1. Généralités

1.1. Stabilisateur

Le groupe $I(E)$ des isométries agit sur l'ensemble des parties de E : si $X \subset E$, $g.X = g(X)$. **proposition 1**

L'ensemble des isométries telles que $g(X) = X$ est un sous-groupe de $I(E)$. C'est le stabilisateur de X, ou groupe des isométries qui conserve X. On le notera G_X.

Exemple : Le groupe des isométries qui conserve un cercle est l'ensemble des rotations de centre le centre du cercle réuni à l'ensemble des symétries orthogonales dont l'axe passe par le centre du cercle. Il est isomorphe au groupe orthogonal O_2.

Remarque : la figure X a d'autant plus de symétries que son groupe d'isométrie est "gros". Exercice : rechercher les isométries qui conservent un triangle.

1.2. Résultats généraux

Lemme 1

On suppose que X est fini : tous les éléments de G_X ont alors un point fixe commun.

Lemme 2

Si X est formé de k points affinements indépendants, alors G_X est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$.

Lemme 2

Soit X une partie de E. On suppose qu'il existe un antidéplacement f qui conserve X. Alors le groupe $G_X^+ = G_X \cap I^+(E)$ est un sous-groupe distingué de G_X et $g \mapsto f \circ g$ est une bijection de G_X^+ sur $G_X^- = G_X \cap I^-(E)$.

Exercice : traiter le cas où X est un segment. Trouver un exemple de figure X pour laquelle $G_X = G_X^+$ (et différent de l'identité).

Exercice subtil : existe-t-il une figure du plan dont les groupe des isométries soit isomorphe à $\mathfrak{A}_4$?

2. Exemples dans le plan

2.1. Groupe diédral

Proposition Le groupe des isométries conservant un polygone régulier P_n de n sommets est un groupe à $2n$ éléments ; le sous groupe $G_{P_n}^+$ est cyclique d'ordre n, engendré par la rotation de centre le centre du polygone et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Le reste du groupe est formé de n réflexions.

Exemples : le groupe du triangle, le groupe du carré.

2.3.Groupes de frises

On appelle **groupe de frises** un sous-groupe de $I(E)$, où E est un plan affine euclidien, qui contient pour seulles translations celles de la forme t_{ku} où $k \in \mathbb{Z}$ et u est un vecteur non nul. Une frise est une figure dont le groupe d'isométries est un groupe de frises.

théorème Il existe sept types de groupes de frise.

3. Exemples dans l'espace

2.1. Le groupe du tétraèdre

Théorème Le groupe des isométries qui conservent un tétraèdre régulier contient 24 éléments. Il est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. **2.2. Le groupe du cube**

Théorème Le groupe des isométries qui conservent un cube contient 48 éléments. Il est isomorphe au produit direct du groupe $\mathfrak{S}_4$ par le groupe à quatre éléments.