Dimension finie, liberté

1. Un petit Vrai/Faux. Il arrive que ce ne soit ni l'un ni l'autre... ou les deux
   a) La réunion de deux sev n'est jamais un sev.
   b) Si k vecteurs sont libres deux à deux, alors ils forment un système libre.
   c) On considère l'ensemble des sev de E, muni de la relation d'ordre d'inclusion : montrer que tout sous-ensemble fini admet un sup et un inf.
   d) Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, tout système échelonné en degré de $n+1$ éléments est libre, donc une base. Donner un exemple de base dont tous les polynômes ont le même degré. Et par ailleurs, quel est ce degré ?
   e) Liberté de la famille $x \mapsto |x-a|$ indexée par $a \in \mathbb{R}$?
   f) L'ensemble des solutions (sur $I =]0, +\infty[$) de l'équadif
   $$xy'' - 2xy' + 7y = 0$$
   est-il un e.v. ? De quelle dimension ?
   g) Soit $E = \mathbb{R}^5$. Donner un exemple de système libre à 6 éléments, de système lié à 2 éléments, à 1 élément, de système générateur à 3 éléments, à 6 éléments.
2. $(e_i)_{i=1..n}$ est une famille libre. Si $e'_k = e_k + e_{k+1}$ (avec $e'_n = e_n + e_1$), la nouvelle famille est-elle libre ? (Pearson, p. 618)
3. Les nombres a et b sont fixés. Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
   est un s.e.v. Quelle en est la dimension ? Et une base ? On pourra regarder les cas particuliers $a = b = 0$, $a = 2$, $b = -1$, $a = b = 1$, enfin $a = b = -1$.
4. Soit A un ensemble, $E = \mathscr{P}(A)$ l'ensemble des sous-ensembles, munie de l'addition différence symétrique. Montrer que, si $K = \mathbb{F}_2$, E est un K-espace vectoriel, en posant $0.x = \emptyset$ et $1.x = x$. Quel est le sev engendré par les singletons ?
5. Soit S une partie d'un K-ev E. Montrer qu'il existe un plus petit sev contenant S. On l'appelle sev engendré par S, on le note $\mathrm{Vect}(S)$ ou $\langle S\rangle$.
   a) Montrer que S est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs pris dans S. Est-ce également l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs quelconques pris dans S ?[1]
   b) Si F et G sont des sev, montrer que
   $$\langle F, G\rangle = F + G$$
   c) Quelle relation y a t-il entre les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$ lorsqu'elles sont finies ?

Applications linéaires

1. Rappeler ce que sont les applications linéaires de E dans F, les formes linéaires. Montrer que leur ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est naturellement un K-ev. Au fait, si E et F sont des K-ev de dimension finie, quelle est la dimension de l'ev $\mathscr{L}(E, F)$?

1. On pourra aussi se poser la question avec des barycentres...

2. Comment s'appelle, lorsque E est un K-espace vectoriel, l'ev $\mathscr{L}(E,K)$? Quelle est sa dimension ?
3. Qu'appelle-t-on "théorème du rang" ?
4. E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. D est l'application qui à P associe son polynôme dérivé. Linéaire ? Injective ? Surjective ? Mêmes questions si on se limite à $E = \mathbb{R}_n[X]$, sev des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
5. Donner un exemple d'endomorphisme non nul tel que $f \circ f = 0$.
6. f et g sont des applications linéaires. Montrer que

$$f\left(\operatorname{Ker}(g \circ f)\right) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$$

$$g^{-1}\left(\operatorname{Im}(g \circ f)\right) = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$$

(Monier)

7. Lemme de factorisation (X-ENS, 1, p. 244) Soit f, g deux applications linéaires. Montrer qu'il existe h linéaire telle que $g = h \circ f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. On précisera les ev de départ et d'arrivée. Traiter également le cas où il existe h tel que $g = f \circ h$.
8. Soit f un endomorphisme de E. Montrer les équivalences :

$$\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$$

$$\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f) = E \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$$

9. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si $(x, f(x)$ est lié pour tout x de E.

Un petit problème : les drapeaux

1. Soit E un K-ev de dimension finie. On appelle drapeau une chaîne de sev

$$\{0\} = D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \ldots \subsetneq D_n = E$$

Soit G l'ensemble des applications linéaires telles que

$$\forall i,\ f(D_i) = D_i$$

Montrer que c'est un groupe.

2. Montrer, en utilisant la question précédente, que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles est un groupe pour le produit. On utilisera une base « adaptée » au drapeau, c'-à-d une base (e_i) telle que $D_i = \operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_i)$.
3. On se place en dimension 3. On considère deux drapeaux $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Montrer que, dans tous les cas, il existe une base (e_1, e_2, e_3) adaptée à $\mathscr{D}$ et une permutation σ de $\mathscr{S}_3$ telles que $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ soit adaptée à $\mathscr{D}'$.
4. En déduire qu'il existe un endomorphisme transformant un couple de drapeaux en un autre couple de drapeaux lorsque la permutation de la question précédente est la même pour les deux couples.

5. (nettement plus difficile). On considère deux drapeaux $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On note $A_{ij} = D'_{i-1} + D_j$ ($i = 1..n+1$, $j = 0..n$) et

$$\sigma(i) = \min\{j,\ A_{ij} = A_{i+1,j}\}$$

   Montrer que σ est un élément de $\mathscr{S}_n$.

6. Montrer qu'il existe une base (e_i) adaptée à $\mathscr{D}$ telle que $(e_{\sigma(i)})$ soit une base adaptée à $\mathscr{D}'$.

7. On fait agir le groupe linéaire sur les couples de drapeaux. Quel est le nombre d'orbites ? (ref. X-ENS, alg 1, p. 241)

Sommes directes

1. Montrer que les sev suivants sont supplémentaires :
   - Les fonctions paires, les fonctions impaires,
   - les matrices symétriques, les matrices antisymétriques,
   - les fonctions constantes et les fonctions d'intégrale nulle sur $[0,1]$ (dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. À quelles conditions trois sous-espaces E_1, E_2 et E_3 sont-ils en somme directe ?

3. On se place en dimension finie. Justifier que tout sous-espace admet un supplémentaire et que tous les supplémentaires d'un sous-espace sont isomorphes. Un hyperplan est un sous-espace dont un supplémentaire est de dimension 1.

4. Montrer que si deux formes linéaires f et g ont le même noyau, alors elles sont proportionnelles. On pourra commencer par supposer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$.

5. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ telle que $s \circ s = id$. Montrer que

$$p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$$

   est une projection. Si on appelle E_1 et E_2 son noyau (resp. son image), que représentent E_1 et E_2 pour l'application s ?

6. Que représente la trace pour une projection ? Utiliser ce résultat pour démontrer : Soit E de dimension finie, $(p_i)_{i=1}^k$ une famille de projecteurs. Montrer que

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$$

   est un projecteur si et seulement si pour tous $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ (Gourdon alg, p.125, Cognet, 1.2.1...)

   On commencera par démontrer que

$$\mathrm{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\, p_i$$

   et on utilisera après l'avoir justifié que

$$\forall x \in E,\ p \circ p_i(x) = p_i(x)$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1 *Soit K un corps infini, E un espace vectoriel de dimension supérieure à un. Montrer que E n'est pas la réunion d'un nombre fini de sous-espaces stricts. (X-ENS p. 239)*

Exercice 2 *Soit K un corps infini et E un sous-espace vectoriel de dimension finie. Si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels de même dimension, montrer qu'ils ont un supplémentaire commun. (On pourra se limiter à des hyperplans).*

Exercice 3 *Soit $E = \mathscr{M}_{n,p}(K)$. Si A et B sont deux éléments de E, on dit que A et B sont équivalentes en lignes s'il existe une matrice $P \in GL(n,K)$ inversible telle que $B = PA$*

1. *Vérifier que c'est une relation d'équivalence. Donner un exemple pour lesquels la classe d'équivalence est réduite à un élément. Si $n = p$ et si A est inversible, quelle est la classe d'équivalence de A ?*
2. *Montrer que A et B sont équivalentes en ligne si et seulement si elles ont le même noyau.*
3. *Par la méthode des opérations élémentaires sur les lignes (ce qui justifie le vocabulaire), déterminer un représentant privilégié dans chaque classe d'équivalence. Décrire en particulier les classes d'équivalence dans le cas de $\mathscr{M}_2(K)$.*
4. *Étudier de même la relation : A et B sont équivalentes en colonnes s'il existe $Q \in GL(p,K)$ telle que $B = AQ$. On montrera en particulier que cela équivaut à : A et B ont même image.*
5. *Que dire de A et B si elles sont équivalentes en lignes et en colonnes ?*

Exercice 4 *Soit $E = \mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur est strictement positif si toutes ses coordonnées sont strictement positives. Montrer que si F est un sous-espace de E qui contient un vecteur strictement positif, alors il admet une base de vecteurs strictement positifs.*

Exercice 5 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On rappelle qu'un sous-espace F est u-stable si $u(F) \subset F$.*

1. *Montrer que F est u-stable s'il existe une projection p d'image F telle que $p \circ u \circ p = u \circ p$. Si $\mathscr{B}$ est une base de E dont les premiers vecteurs constituent une base de F, que dire de la matrice de u par rapport à cette base ?*
2. *Montrer qu'il existe des endomorphismes n'ayant aucun sous-espace stable (autre que les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et E).*
3. *On dit que u est (F,G)-réduit si F et G sont des sous-espaces supplémentaires tous les deux u-stables. Que dire de la matrice de u dans une base adaptée à ces espaces supplémentaires ? Montrer que u est (F,G)-réduit si u commute avec la projection sur F suivant G.*

Exercice 6 *Trouver une matrice qui est inversible à gauche, mais pas à droite (ou le contraire). Indication : penser aux applications injectives et non surjectives, ou le contraire).*

Exercice extrait de l'épreuve 1 de l'agrégation 2008. La matrice $E_{i,j}$ de l'énoncé est la matrice dont seule la case ligne i et colonne j est égale à 1, les autres cases sont nulles.

Exercice 7 *1. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes de W. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

i L'espace vectoriel est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i = 1, \ldots, n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j, $j \neq i$.

ii Pour $i = 1, \ldots, n$, on a $p_i^2 = p_i$; pour $j \neq i$ on a $pipj = 0$; et on a $p_1 + \ldots + p_n = \mathbf{1}_W$.

(en réalité, dans (ii), on peut déduire $p_i^2 = p_i$ se déduit des deux autres hypothèses).

2. Soit toujours W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $\rho : M_n(\mathbb{C}) \to End(W)$ un morphisme unitaire d'algèbres.

a) Pour $i = 1, \ldots, n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho(E_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes P_i satisfont à la condition (ii) de la question 1.

b) Pour $i = 1, \ldots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que la restriction de $\rho(E_{i,j})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i.

c) Dans la suite de cette question, on fixe une base $(w_1, \ldots, w_r)$ de l'espace vectoriel W_1. On pose

$$v_1 = w_1, v_2 = \rho(E_{2,1})\, w_1, \ldots, v_n = \rho(E_{n,1})\, w_1$$

Démontrer que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre et que, pour tous les entiers s, t et k compris entre 1 et n on a

$$\rho(E_{s,t})\, v_k = \delta_{t,k} v_s,$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t = k$ et vaut 0 sinon.

d) Plus généralement, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho(E_{k,1})\, w_j$, pour $k = 1, \ldots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j, $1 \leqslant j \leqslant r$.

e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(M)$ est la matrice diagonale par blocs

$$diag(M, \ldots, M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M \end{pmatrix}$$