Matrices

5.3 Matrices
Espaces $\mathscr{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K. Isomorphisme canonique avec $\mathscr{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.
Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Taille maximale des sous-matrices carrées inversibles d'une matrice donnée. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.
Matrice d'un endomorphisme d'un espace muni d'une base, matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
5.4 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires Systèmes d'équations linéaires, matrice associée. Systèmes de Cramer. Applications à des problèmes de géométrie.
Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
Application des opérations élémentaires à la résolution de systèmes linéaires, au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections.
Génération de $GL(n, K)$ et $SL(n, K)$.

Retour sur les projecteurs

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On suppose que p_1, p_2 et p_3 sont des endomorphismes tels que

$$\mathrm{id}_E = p_1 + p_2 + p_3$$

   On pose $E_i = \mathrm{Im}(p_i$. Montrer que $E = E_1 + E_2 + E_3$.
2. On suppose de plus que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$. Montrer que les (p_i) sont des projecteurs, que la somme est directe. Quels sont les noyaux des projections (p_i) ?

Changements de base C'est un outil indispensable. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut l'interpréter comme la matrice d'une application linéaire f de E (de dimension p et muni d'une base $\mathscr{B} = (b_j)$) dans F (de dimension n et muni d'une base $\mathscr{C} = (c_i)$: la colonne j étant celle des coordonnées de $f(b_j)$. Si on note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à une base $\mathscr{C}'$, la « nouvelle » matrice de f est :

$$A' = Q^{-1}AP$$

On dit alors que A et A' sont **équivalentes**.

Si A est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut l'interpréter comme la matrice d'un endomorphisme de E (de dimension n et muni d'une base $\mathscr{B} = (b_j)$). Si on change de base, la formule précédente devient

$$A' = P^{-1}AP$$

les matrices A et A' sont alors dites **semblables**.

Ces deux relations, qui sont des relations d'équivalences, sont de complexité différente.

Inverse à gauche, à droite... On suppose que A et B sont deux matrices telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si A et B sont carrées, il est impossible que $BA = I$.
2. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_{3,2}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(K)$, alors nécessairement $BA = I_2$. (Pearson p. 742)

Rang La notion de **rang** d'une matrice est très importante. Par définition, le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace engendré par les colonnes, donc la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ si c'est la matrice d'une application linéaire.

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, justifier que son rang est inférieur ou égal à $\min(n,p)$. Donner un cas où cette valeur est atteinte.
2. Montrer qu'une matrice de rang r est équivalente à une matrice-bloc de la forme

   $$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où 0 désigne un bloc nul ou vide. En déduire que deux matrices (de même taille) sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
3. Montrer qu'une matrice a même rang que sa transposée.
4. Quelles sont les matrices qui ne sont semblables qu'à elle même ?
5. Matrices carrées de rang 1.
   a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang inférieur ou égal à 1 si et seulement si il existe $(X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ telles que $A = X\,{}^tY$. Dans quel cas la matrice est-elle exactement de rang 1 ? Y a-t-il unicité de X et Y ?
   b) Montrer qu'alors $\mathrm{tr}(A) = {}^tY X$ et calculer A^2 en fonction de A.
   c) Montrer qu'une matrice de rang 1 est la matrice d'un projecteur si et seulement si sa trace est égale à 1. Signification de X et Y ? (Monnier, 8.1.31)
6. Conservation du rang.
   a) En interprétant une matrice comme étant la matrice d'une application linéaire, montrer qu'on ne change pas le rang d'une matrice en la pré-(post) multipliant par une matrice inversible.
   b) Soit A une matrice de dimension $n \times p$. On appelle *opération élémentaire* une transformation d'un des types suivants :
      – Remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$
      – idem avec les colonnes
      – Échanger deux lignes ou colonnes.
      – Multiplier une ligne (colonne) par une constante non nulle.
      Vérifier que toute opération élémentaire se traduit par la pré-(post) multiplication par une matrice inversible. Quels sont les déterminants de ces matrices ? En déduire que deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
   c) Montrer que A et ${}^tA$ ont le même rang.

7. Soit P la matrice :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Décrire PA où A a trois lignes et BP où B a trois colonnes.

Centre On s'intéresse au centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire aux matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Méthode algébrique : montrer que ce centre est réduit aux matrices scalaires. On utilisera pour cela les matrices élémentaires E_{ij} qui forment la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et on commencera par calculer $E_{ij}E_{kl}$.
2. Méthode géométrique : montrer le même résultat en montrant au préalable que, si f est un endomorphisme tel que
$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{C},\ f(x) = \lambda x$$
alors f est une homothétie.

Matrices triangulaires

1. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures. Montrer que $\mathscr{T}$ est stable pour le produit. On pourra procéder par le calcul ou s'intéresser aux endomorphismes représentés par de telles matrices (cf. l'exercice sur les drapeaux)
2. Montrer qu'une matrice de T inversible dans T est inversible dans l'ensemble des matrices. Réciproquement, montrer que si M est triangulaire supérieure et inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors M^{-1} est dans $\mathscr{T}$. (N.B. il y a une démonstration efficace qui utilise le théorème de Cayley-Hamilton).
3. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente (cad admet une puissance nulle) si et seulement si ses éléments diagonaux sont nuls.
4. Application : calculer A^p lorsque
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Gourdon, p.123)

Matrices de permutations Si σ est une permutation de $(1,2,\dots,n)$, on appelle matrice de permutation la matrice P_σ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux d'indices $(\sigma(j), j)$ qui valent 1. Montrer que les matrices de permutations forment un groupe isomorphe à S_n. Quel est l'effet d'une matrice de permutation lors d'une pré ou post-multiplication avec une matrice A ?

Le crochet de Lie Soit E l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées. On définit le crochet de Lie [2] par :
$$[A,B] = AB - BA$$

1. Vérifier que le crochet de Lie est anticommutatif. (c-à-d. $[B,A] = -[A,B]$)

2. Sophus Lie, mathématicien norvégien, (ou Suédois ?

2. Vérifier que le crochet de Lie a la propriété de Jacobi :

$$[A, BC] + [B, CA] + [C, AB] = 0$$

3. Soit $A \in E$ fixée. On note $E_0 = \{B \in E \mid [A, B] = 0\}$ et

$$E_p = \{B \in E \mid [A, B] \in E_{p-1}\}$$

   Montrer que les E_p sont des s.e.v de E. Comment s'interprète E_0 ?

4. Montrer que les E_p forme une suite croissante et stationnaire.
5. Montrer que la réunion des E_p est une sous-algèbre de E.

[Tauvel ex alg lin p. 7] Une idée de suite : le problème sur le théorème d'Engel, dans Pearson, p. 745.

*Une diagonalisation niveau 0 Soit M et P les matrices définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D = P^{-1}MP$, D^n puis M^n où $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit trois suites complexes (a_n), (b_n) et (c_n) par leur premier terme et les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2} \\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

   déterminer la limite des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interprétation géométrique ? (Pearson p. 742)

Déterminants

Définition du déterminant Il existe plusieurs façons de définir le déterminant d'une matrice :
– Par une formule : rappelez-la.
– Par récurrence : comment s'y prendre ?
– En utilisant la notion de forme multilinéaire alternée.
Suivant la définition, certaines propriétés du déterminant sont plus ou moins faciles à démontrer : par exemple, comment démontrer que

$$\det({}^t A) = \det A, \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Quelques exercices :

1. L'espace E est de dimension quelconque et ϕ est une forme n-linéaire qui vérifie :

$$\text{Dès qu'il existe } k \in 1..n-1 \text{ tel que } x_k = x_{k+1} \text{ alors } \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

   Montrer que ϕ est alternée.

2. (*) Montrer qu'une famille de n vecteurs qui annule toute forme n linéaire alternée de E est nécessairement une famille libre. (ref. X-ENS tome 2, p. 7)

3. Pourquoi parle-t-on du déterminant de n vecteurs par rapport à la base $\mathscr{B}$ et du déterminant d'un endomorphisme sans préciser la base ?
4. Calculer le déterminant d'une matrice circulante. (cf. problème du mercredi)

Matrices triangulaires Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.
Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Quelques déterminants particuliers

1. Calculer le déterminant de la matrice de permutation P_σ.
2. Calculer le déterminant de Vandermonde : la matrice de Vandermonde est de la forme $(a_i^{j-1})_{i,j}$, où les (a_i) sont n-nombres (complexes). On utilisera des combinaisons de lignes (ou colonnes) et un raisonnement par récurrence, pour aboutir à :

$$\det((a_i^{j-1})) = V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$$

   Combien y a-t-il de facteurs ? Quand est-il nul ?
3. Une matrice tridiagonale est une matrice carrée M telle $m_{ij} = 0$ dès que $|i-j| > 1$. On considère une matrice tridiagonale particulière où :

$$\begin{cases} m_{ii} = a, & \text{pour tout} i \\ m_{i,i+1} = b, & \text{pour tout} i \\ m_{i+1,i} = c, & \text{pour tout} i \end{cases}$$

   Montrer que si D_n est le déterminant de M lorsque la taille de la matrice est n, on a :

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_n$$

   Comment en déduire D_n ? Voir Gourdon p.149 pour un cas facile, Sorosina p.194, Monier 9.6.1.

Déterminant et matrices inversibles

1. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$. Justifier que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ (il peut y avoir différentes méthodes).
2. Soit $\widetilde{A}$ la comatrice de A. Déterminer $A \times {}^t\widetilde{A}$. Calculer le déterminant de la comatrice de A.
3. Soit $\mathscr{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. C'est un anneau. Montrer qu'une matrice A est inversible dans $\mathscr{A}$ si et seulement si son déterminant est ± 1.