## a

1.
$$\forall x \in \mathbb{Z}, 10^0 x \in \mathbb{Z}, \text{ donc } \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$
Si $x = \frac{1}{10}$, alors $10x \in \mathbb{Z}$ donc $x$ est décimal mais n'est pas dans $\mathbb{Z}$.
$$x \in \mathbb{D} \iff \exists (a,n) \in \mathbb{Z}^2,\ x = \frac{a}{10^n}$$
donc $\mathbb{D} \in \mathbb{Q}$.
Enfin, le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal sinon il existerait $a$et $n$ entiers tels que
$$10^n = 3a$$
et 3 serait un facteur premier de $10^n$.
2. Si $10^n x \in \mathbb{Z}$ et $10^m y \in \mathbb{Z}$, alors $10^p(x+y) = 10^p x + 10^p y \in \mathbb{Z}$ si $p = \sup(m,n)$ et $10^{m+n}xy = 10^m x 10^n y \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication. On peut même vérifier que c'est un anneau.
3. (a) Si $x = \frac{a}{2^\alpha 5^\beta}$ alors $10^{\sup(\alpha,\beta)} x \in \mathbb{Z}$.
   (b) Si $10^n \frac{a}{b} = k \in \mathbb{Z}$ alors $10^n a = bk$. Comme $a$ et $b$ sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que $b$ divise $10^n$ ; donc $b$ est de la forme $2^\alpha 5^\beta$, un facteur premier de $p$ est deux ou 5 ($b \neq 1$).
   (c) $x$ est décimal si et seulement si sont dénominateur irréductible est de la forme $2^\alpha 5^\beta$, $\alpha$ et $\beta$ étant dans $\mathbb{N}$.
4. (a) La série de terme général $\frac{d_n}{10^n}$ est à termes positifs ; comme
$$\frac{d_n}{10^n} \leqslant 9 \frac{1}{10^n}$$
elle est majorée par une série géométrique convergente donc elle est convergente. Sa somme (et non sa limite) est notée $x$.
   (b) Le nombre $\frac{d_n}{10^n}$ est décimal (car $10^n \frac{d_n}{10^n} \in \mathbb{Z}$) ; comme une somme finie de décimaux est un décimal, on a traité le premier cas. Supposons maintenant que
$$x = \sum_{n=0}^{N} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$
La première partie de la somme est un décimal et
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{N+1}} \frac{1}{1-1/10}$$
qui est également un décimal. Si la suite $(d_n)$ est impropre, $x$ est encore un décimal.
   (c)
$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = \frac{d_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leqslant \frac{d_N}{10^N} + 9 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leqslant \frac{d_N}{10^N} + \frac{9}{10^{N+1}} \frac{1}{1-1/10}$$
et donc
$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leqslant \frac{d_N}{10^N} + \frac{1}{10^N}$$
ce qu'il fallait démontrer. Il y a égalité lorsque $d_k = 9$ à partir de $k = N+1$ et seulement dans ce cas là (considérer
$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9-d_k}{10^k} = 0$$

(d) Supposons que $x$ ait deux développements décimaux $(d_n)$ et $(d'_n)$. Soit $N$ le plus petit indice telle que $d_N \neq d'_N$. En supposant $d'_N > d_N$, donc $d'_N \geqslant d_N + 1$ on a

$$\frac{d'_N}{10^N} \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leqslant \frac{1+d_N}{10^N} \leqslant \frac{d'_N}{10^N}$$

Cette chaîne d'inégalités est donc une égalité et par la question précédente, tous les $(d_k)$ sont égaux à $9$ pour $k > N$, et $d'_N = d_N + 1$ ; l'un des développements est impropre.

5. Si $x$ est un décimal positif, il s'écrit $x = \frac{a}{10^n}$. On supposera d'abord $a < 10^n$. Si l'on écrit l'entier $a$ en base $10$, on a

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_0$$

avec $k < n$ et on en déduit

$$x = \frac{a_k}{10^{n-k}} + \frac{a_{k-1}}{10^{n-k+1}} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}$$

Si $a > 10^n$ on extrait de $x$ sa partie entière. Il y a unicité si on se limite aux développements décimaux propres.

# b

1. (a) Allons-y

```
  decimal(a,b,N)
d,r=a//b,a\% b; print (d,r)
for k in [1,N]:
   d,r=10*r//b,10*r \% b
   print(d,r)
```

(b) On trouve les couples (0,5),(3,11,(8,6),(4,8),(6,2),(1,7),(5,5),(3,11),....

2. (a) Pour $n = 0$, on a $a = bd_0 + r_0$ donc

$$x = \frac{a}{b} = d_0 + \frac{r_0}{b}$$

La propriété est vraie à l'ordre $0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ ; si

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

et $10r_n = d_{n+1} \times b + r_{n+1}$ alors

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{d_{n+1} \times b + r_{n+1}}{10^{n+1} b}$$

soit

$$x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}$$

La propriété est donc héréditaire et est ainsi validée par récurrence.

(b)
$$10^n a = 10^n \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \right) b + r_n$$

Dans le second membre, le coefficient de $b$ est un entier. Comme $r_n$ est le reste d'une division euclidienne par $b$, on en déduit que c'est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par $b$.

(c) Si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$ la somme partielle d'indice $n$ de la série, on a $S_n = x - \frac{r_n}{10^n b}$ ; comme la suite $(r_n)$ est positive bornée (par $b$) on en déduit la convergence de la série.
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$$
On remarque également que $(d_n)$ est bien une suite décimale : comme $10 r_n = b d_{n+1} + r_{n+1}$, et que $r_n$ et $r_{n+1}$ sont inférieurs à $b$, on a bien $d_{n+1} < 10$. Enfin, la suite est propre, sinon $x$ serait décimal...

3. (a) Le nombre $r_n$ n'est jamais nul : sinon $10^n a = bq$ et $x$ serait décimal.

(b) Les nombres $r_0, r_1, \ldots, r_{b-1}$ sont $b$ nombres parmis les $b-1$ possibles restes non nuls d'une division par $b$. Il ne peuvent être distincts (principe de Dirichlet)

(c) On montre par récurrence sur $k$ que $r_{q+k} = r_{p+q+k}$. Pour $k = 0$, c'est la définition de $p$ et $q$. La propriété est héréditaire : si $r_{q+k} = r_{p+q+k}$, alors
$$r_{q+k+1} = 10 r_{q+k} \mathrm{mod} b = 10 r_{p+q+k} mod b = r_{p+q+k+1}$$
La suite $(r_n)$ est donc bien de période $p$ à partir du rang $q$. De même, les définitions
$$d_{q+1} = 10 r_q div b, \qquad d_{q+p+1} = 10 r_{p+q} dib b$$
prouvent que $d_{q+1} = d_{q+1+p}$ et la même récurrence que ci-dessus prouvent que $(d_n)$ est de période $p$ à partir de $q+1$.

4. (a) i. Il y a $b$ puissances de $10$ à considérer. Aucune n'est congrue à $0$ modulo $b$, sinon un multiple de $b$ serait une puissance de $10$ et $x = \frac{a}{b}$ serait décimal. (On peut aussi utiliser une des questions qui précède)

ii. Il y a équivalence
$$10^m \equiv 10^n \pmod b \iff 10^m a \iff 10^n a \pmod b$$
car $a \wedge b = 1$ ($a$ et $b$ sont premiers entre eux). L'implication de gauche à droite est immédiate, l'implication de droite à gauche est une application du théorème de Gauss. Donc
$$10^m \equiv 10^n \pmod b \iff r_n \equiv r_m a \pmod b \iff r_n = r_m$$
puisque ce sont des restes modulo $b$.

iii. La question précédente montre que les indices $q$ et $p$ ne dépendent que de $b$.

iv. Pour 7 : $(0, 6)$, pour 12 : $(2, 1)$ enfin pour 112 : $(4, 6)$.

5. (a) i. Pour démontrer l'équivalence, on peut observer que dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, la classe de $10$ est inversible. On peut également utiliser le théorème de Gauss comme plus haut.

ii. Si on veut $q$ minimal tel que $10^q$ est congru à $10^{p+q}$, il suffit donc de prendre $q = 0$, la prépériode $\omega(b)$ est égale à $0$.

(b) Soit $(E)$ l'équivalence à démontrer. La partie de droite à gauche est immédiate. Pour l'autre implication, remarquons que $10^p - 1$ est premier à $2^j \times 5^k$. Par Gauss, $2^j 5^k$ divise $10^q$. Le même théorème de Gauss appliqué à $c$ montre que $c$ divise $10^p - 1$.
Comme $10^q = 2^q \times 5^q$, le plus petit entier tel que $2^j \times 5^k$ divise $10^q$ est $\max(j, k)$. De plus $10^p \equiv 1 \pmod c$ prouve que $\pi(p) = \pi(c)$.

(c) On trouve $(2, 1)$ et $(5, 6)$ ;