Éléments de corrigé pour l'épreuve 2 de l'agrégation interne de Mathématiques 2010

1 Partie I

1. (a) Δ est linéaire. Si P est constant $\Delta(P) = 0$. Sinon, en développant à l'aide du binôme de Newton, on voit que $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$. Ainsi pour $n > \deg P$, on a $\Delta^n(P) = 0$.

   (b) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$, alors $\Delta^p(X^{p+1}) = 0$ mais $\deg(\Delta^p(X^{p+1})) = 1$.

2. $\operatorname{Ker}\Delta$ est l'ensemble des polynômes constants car si $P(X+1) = P(X)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$ donc le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines et est ainsi nul. Donc $P = P(0)$. Réciproquement, un polynôme constant est bien 1-périodique.

3. (a) $\Delta(H_0) = 1 - 1 = 0$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \Delta H_n &= H_n(z+1) - H_n(z) \\ &= \frac{(z+1)z\dots(z-n+2) - z(z-1)\dots(z-n+2)(z-n+1)}{n!} \\ &= \frac{z(z-1)\dots(z-n+2)((z+1)-(z-n+1))}{n!} \\ &= \frac{z(z-1)\dots(z-n+2)(n)}{n!} \\ &= \frac{z(z-1)\dots(z-(n-2))}{(n-1)!} = H_{n-1} \end{aligned}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Pour $k > n$, $\Delta^k(H_n) = 0$ car $\deg H_n = n$.
   - Pour $k < n$, $\Delta^k(H_n) = H_{n-k}$ avec $n - k > 0$ donc $H_{n-k}(0) = 0$.
   - Pour $k = n$, $\Delta^n(H_n) = H_0 = 1$.

   (b) Toute sous-famille finie de $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille de polynômes non nuls de degré 2 à 2 distincts, donc est une famille libre. Ainsi la famille $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille libre de $\mathcal{P}$. Si P est un polynôme non nul de degré $N \in \mathbb{N}$, comme la famille $(H_0, \dots, H_N)$ est une base de $\mathbb{C}_N[X]$ (car famille libre de $N+1$ vecteurs dans un espace de dimension $N+1$), P est combinaison linéaire des polynômes $H_0, \dots, H_N$. Ainsi la famille $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi une famille génératrice de $\mathcal{P}$ et donc en est une base.
   Soit P un polynôme, on écrit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n$ avec les a_n des scalaires. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de Δ,

$$\Delta^k(P)(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\Delta^k(H_n)(0)}_{\delta_{n,k}} = a_k.$$

   On a $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$, $\Delta(X^2) = 2X + 1$, $\Delta(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$. Ainsi $\Delta^2(X^3) = 3\Delta(X^2) + 3\Delta(X) + \Delta(1) = 6X + 6$. Donc $\Delta^3(X^3) = 6$. On a donc

$$\boxed{X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3}.$$

   (c) Soit $P \in \mathcal{P}$, on écrit avec a_n des scalaires

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Delta(H_{n+1}) = \Delta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_{n+1}\right).$$

   Ceci montre que l'endomorphisme Δ est surjectif bien qu'il ne soit pas injectif. Ceci montre que $\mathcal{P}$ n'est pas de dimension finie.

4. (a) Puisque Δ est surjective, X^p admet un antécédent f par Δ et l'on peut choisir $f(0) = 0$. Par télescopage, on a donc $\sum_{n=0}^{N} n^p = \sum_{n=0}^{N}(f(n+1) - f(n)) = f(N+1) - f(0) = 0$.

   (b) On a $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3 = \Delta(H_2 + 6H_3 + 6H_4)$. On pose donc $\boxed{f = H_2 + 6H_3 + 6H_4}$, on a bien $f(0) = 0$. On trouve

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} n^3 = f(N+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$

5. (a) L'application $\|\cdot\|$ est homogène, vérifie l'inégalité triangulaire, et si $\|P\| = 0$, alors la fonction polynomiale P s'annule sur $[0,1]$ donc une infinité de fois donc est nulle. Ainsi $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathcal{P}$.

   (b) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|X^n\| = 1$. Mais $\Delta(X^n) = \sum_{n=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$. Ainsi

$$\|\Delta(X^n)\| \geqslant |\Delta(X^n)(1)| = \sum_{n=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1 \longrightarrow +\infty.$$

   On voit donc que l'application linéaire Δ n'est pas bornée sur la sphère unité, donc elle n'est pas continue.

   (c) On pose $\boxed{N(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\Delta^n(P)(0)|}$ (somme finie). Comme Δ est linéaire, N est homogène, et vérifie l'inégalité triangulaire. Si $N(P) = 0$, alors cette somme de termes positifs étant nulle tous ses termes sont nuls, donc toutes les coordonnées de P dans la base $(H_n)_{n\geqslant 0}$ sont nulles donc $P = 0$.
   De plus,

$$N(\Delta(P)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\Delta^{n+1}(P)(0)\right| = N(P) - |P(0)| \leqslant N(P).$$

   Si $P = X$, $P(0) = 0$ donc $N(\Delta(P)) = N(P)$. Ainsi Δ est de norme 1.

6. (a) On suppose que Y contient une boule ouverte $B(a, r)$ de centre $a \in Y$ et de rayon $r > 0$. On fixe $x \in X$. L'image de cette boule par la translation de vecteur $-a$ est la boule $B(0, r)$ qui encore incluse dans Y car l'esapce vectoriel Y est stable par translation par des vecteurs de Y. Enfin, l'image de cette dernière boule par l'homothétie vectorielle de rapport $t > 0$ est la boule $B(0, tr)$ qui est encore incluse dans Y car l'espace vectoriel Y stable par homothétie vectorielle. Pour t suffisament grand, dès que $tr > \|x\|$, cette boule de F contient x, ce qui prouve que x est dans Y et donc que $X = Y$.

   (b) Par hypothèse

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \mid \quad T^n(x) = 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} T^n.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} T^n$ est une partie fermée de X (car image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue T^n), donc d'après le lemme de Baire, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} T^n$ de X soit d'intérieur non vide. D'après la question précédente, il est forcément égal à X. Donc $\operatorname{Ker} T^n = X$, *i.e.* $T^n = 0$.

   (a) Si $\mathcal{P}$ était complet la norme N de 5.c, alors comme Δ est une application linéaire continue et localement nilpotente, elle serait nilpotente ce qui n'est pas (question1.b).

   (b) On suppose que $\mathcal{P}$ est muni d'une norme qui lui confère une structure d'espace de Banach. L'espace $\mathcal{P}$ est la réunion des sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}_n[X]$ qui sont fermés car de dimension finie. Alors d'après le lemme de Baire, l'un au moins des espaces $\mathbb{C}_n[X]$ est d'intérieur non vide, ce qui est faux car sinon $\mathbb{C}_n[X]$ serait égal à $\mathcal{P}$.