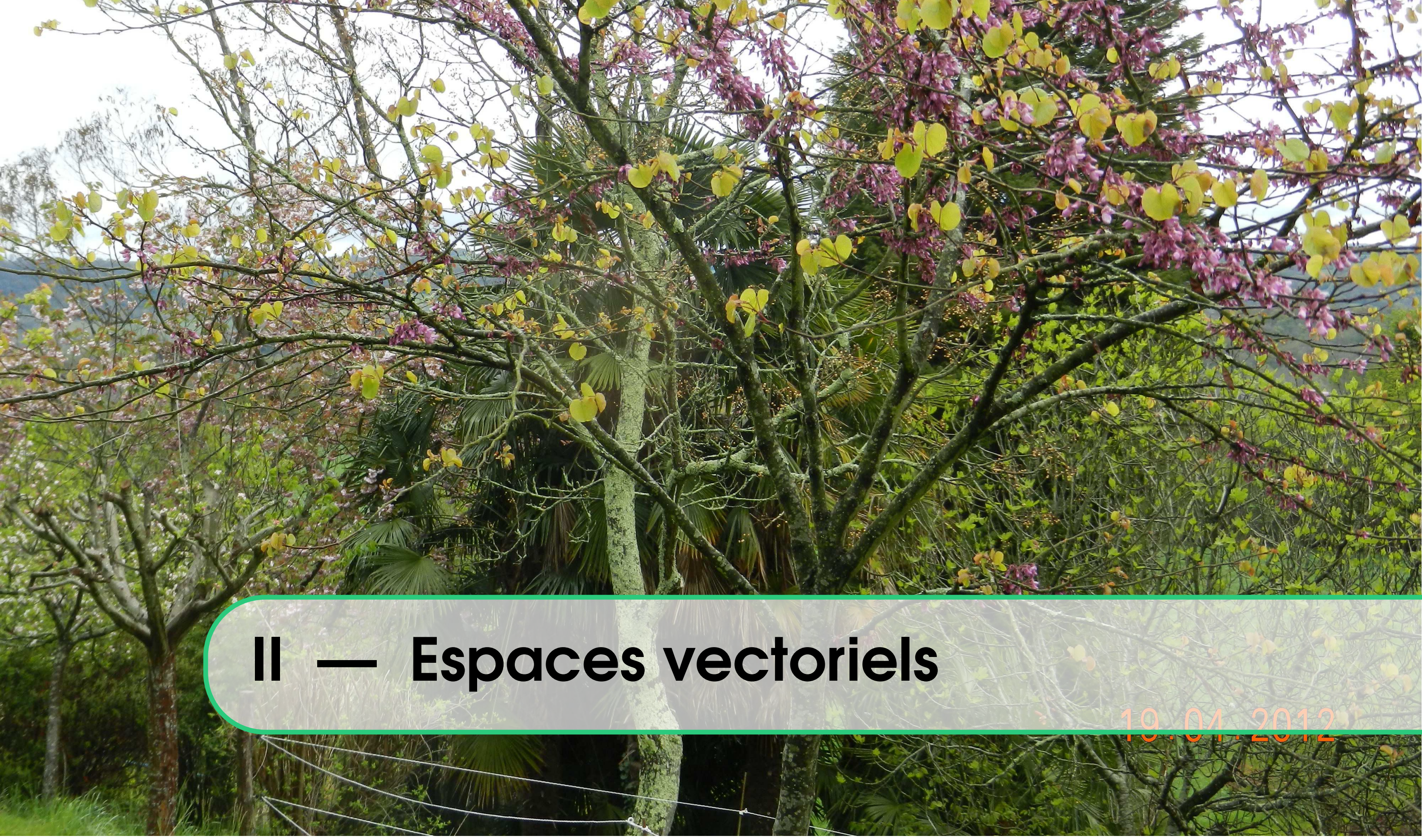


II — Espaces vectoriels

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

On note par K un corps commutatif ; ce sera le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel E est un ensemble qui va généraliser l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace. Les éléments de E seront appelés **vecteurs**, ceux de K seront les **scalaires** (ce qui signifie nombres purs).

Définition II.1 Un ensemble E non vide est un K-espace vectoriel si on a défini une addition « + »et une opération « . »telles que :

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ x+y \in E$
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \lambda.x \in E$
3. E est un groupe commutatif pour $+$.
4. Les quatre axiomes suivants sont vérifiés :
   (a) $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
   (b) $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
   (c) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
   (d) $1.x = x$

   et ce, pour tous les vecteurs x et y, et pour tout les scalaires

L'opération notée "." s'appelle **produit par un scalaire**. C'est aussi ce qu'on appelle une loi de composition externe. Il nous arrivera d'omettre ce point.

1.2 Premiers exemples

En mathématiques, il y a beaucoup d'espaces vectoriels, et ce, dans tous les domaines : géométrie bien sûr, mais aussi algèbre et analyse. Donnons les premiers grands exemples.

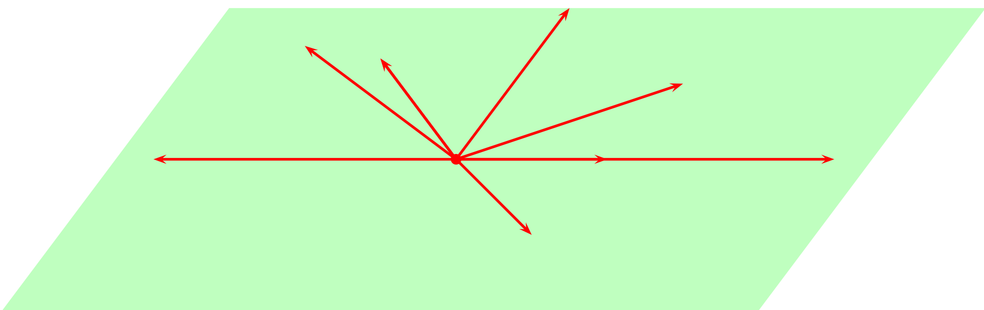
Les vecteurs du plan ou de l'espace

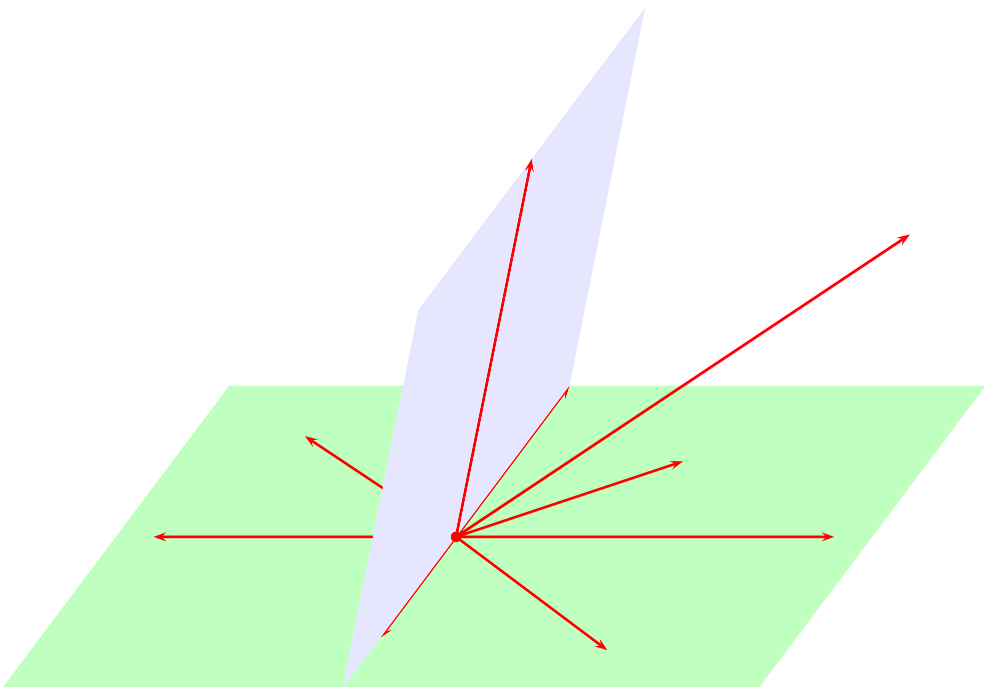
On suppose connues les définitions classiques de la somme de deux vecteurs par la règle du parallélogramme, du produit par un scalaire : tous les axiomes des espaces vectoriels sont alors satisfaits.

Les vecteurs d'une droite forment un ensemble noté $\mathscr{D}$ qui est un espace vectoriel ; c'est également le cas de l'ensemble des vecteurs du plan $\mathscr{P}$ et de l'espace $\mathscr{E}$. On peut les dessiner, en prenant des vecteurs de même origine, et cette origine représente le vecteur nul.

Voici un dessin de $\mathscr{D}$.

puis un dessin de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{E}$:





L'espace vectoriel nul

Quelque soit le corps K, si E ne contient qu'un élément, c'est forcément le vecteur nul (qui par hypothèse est toujours dans E, et les opérations se réduisent à $0+0=0$ et $\lambda.0=0$ où λ est un scalaire. Cet espace vectoriel s'appelle l'espace vectoriel nul, on le note $\{0\}$.

Les espaces K^n

On rappelle que $K^n = K \times K \times \ldots \times K$, avec n facteurs, est l'ensemble des n-listes d'éléments de K.

Proposition II.1 Si K est un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble K^n est un K-espace vectoriel pour les opérations :

$$\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

et

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

La démonstration consiste en de (fastidieuses) vérifications élémentaires. Le vecteur nul est $(0,0,0,\ldots,0)$, il est noté comme d'habitude 0. Il est clair que cet exemple très important d'espace vectoriel est à mettre en rapport avec l'exemple précédent des vecteurs de la géométrie : ayant choisi des vecteurs de base, à tout vecteur on peut associer la liste de ses coordonnées.

Remarquons au passage que pour $n=1$, on constate que le corps K lui même est un K-espace vectoriel.

1.3 Les espaces vectoriels de matrices

Rappelons que l'on note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ les matrices à n lignes et p colonnes : une matrice est une suite finie de la forme

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$$

que l'on dessine en mettant les coefficients $a_{i,j}$ dans un tableau où i représente le numéro de la ligne (du haut vers le bas), et j le numéro de la colonne (de gauche à droite).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{1,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition II.2 L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un K-espace vectoriel pour les lois définies par

$$\lambda.(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}), \qquad (a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{ij} + b_{i,j})$$

La démonstration est en tout point semblable à la précédente.

1.4 L'espace des polynômes

L'ensemble $K[X]$ des polynômes sur un corps K, est lui même un K-espace vectoriel.

Théorème II.1 L'ensemble $K[X]$ est un K-espace vectoriel pour l'addition des polynômes et le produit par un scalaire défini par :

$$\text{Si} \qquad P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \qquad \lambda.P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i X^i$$

Attention, dans cet exemple, les vecteurs sont donc des polynômes, le vecteur nul est le polynôme nul.

1.5 Les espaces d'applications

Soit X un ensemble (non vide) quelconque : ce sera le plus souvent un sous-ensemble de $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, mais pas forcément.

Théorème II.2 L'ensemble $\mathscr{A}(X, K)$ des applications de X dans K est un K-espace vectoriel pour les opérations définies par

$$\lambda.f : x \mapsto (\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$$

et

$$f + g : x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

où λ un élément de K (un scalaire), x un élément de X, f et g des applications de X dans K.

La démonstration est encore immédiate, mais il faut bien maîtriser les objets que l'on utilise. Ainsi, le vecteur nul est ici l'application constante nulle.

Remarquons, qu'avec $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, on retrouve K^n et avec $X = \mathbb{N}$ on retrouve l'ensemble des suites à valeurs dans K.

1.6 Premières propriétés

Donnons une liste de propriétés utiles dans les espaces vectoriels, et vrai pour un vecteur x quelconque et un scalaire x quelconque.

Proposition II.3
- $0.x = 0$.
- $\lambda.0 = 0$.
- $\lambda.x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.
- $-x = (-1).x$

Ici 0 désigne soit le scalaire 0, soit le vecteur nul...

Preuve Écrivons la démonstration des deux dernières e propriétés. Pour la troisième propriété, supposons $\lambda.x = 0$. Alors, si λ est nul, la première alternative de la conclusion est vraie. Sinon, il existe λ^{-1} et :

$$0 = \lambda^{-1}.(\lambda.x(\lambda^{-1}\lambda).x = 1.x = x$$

donc $x = 0$. , en remarquant que $-x$ désigne l'opposé de x, et -1 est l'opposé de 1 dans le corps K.

$$(-1).x + x = (-1).x + 1.x = ((-1) + 1).x = 0.x = 0$$

donc $(-1).x$ est bien l'opposé de x. •

Encore un peu de vocabulaire.

Définition II.2 Si $(\lambda_i)_{i=1..k}$ et $(u_i)_{i=1..k}$ sont deux suites finies de scalaires et de vecteurs alors

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_k.u_k$$

s'appelle une **combinaison linéaire** des vecteurs u_i.

C'est bien sûr un vecteur.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

De même que l'espace $\mathscr{E}$ des vecteurs de l'espace contient des plans et des droites vectorielles, tout espace vectoriel contient des sous-ensembles que l'on appelle sous-espaces vectoriels.

Définition II.3 Si E est un K-espace vectoriel et si F est un sous-ensemble (non vide) de E, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** si F est lui-même un espace vectoriel (pour les mêmes opérations).

Disons-le tout de suite, il est inutile de vérifier tous les axiomes. En effet, la plupart des propriétés des lois de composition étant vraies dans E restent vraies dans F. On dispose ainsi du théorème, que l'on utilise très souvent :

Théorème II.3 L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. F est non vide.
2. F est stable pour la loi $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$$

3. F est stable pour la loi externe c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in K,\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$$

Preuve En effet, les énoncés du théorème disent que les lois de composition sont bien définies. Elles continuent à vérifier l'associativité, la distributivité. De plus, si $x \in F$, alors $-x = (-1).x \in F$ donc F contient les opposés de ses éléments. Enfin, comme $x \in F$ et $-x \in F$, alors $x - x = 0 \in F$: il est inutile de vérifier que F contient le neutre. •

On peut condenser la vérification en montrant

$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in K, \qquad x + \lambda.y \in F$$

2.2 Exemples

Cette notion de sous-espace vectoriel est très agréable pour démontrer que tel ou tel ensemble est un espace vectoriel. Ainsi, démontrer que l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle I est un espace vectoriel se fait facilement :

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$, et soit F le sous-ensemble des fonctions dérivables sur I. Alors F est un sous-espace vectoriel de E puisque :

- la somme de deux fonctions dérivables sur I est une fonction dérivable sur I.
- le produit d'une fonction dérivable sur I par une constante est dérivable sur I.

D'autres exemples, chez les matrices.

Proposition II.4 Soit $E = \mathcal{M}_n(K)$ $(n \geqslant 1)$ l'espace vectoriel des matrices carrés sur K. L'ensemble $\mathscr{D}_n$ des matrices **diagonales**, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ telles que $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices **symétriques**, c'est-à-dire des matrices $A = (a_{ij})$ telles que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous les (i,j), est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices **antisymétriques**, c'est-à-dire des matrices $A = (a_{ij})$ telles que $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous les (i,j), est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve Elles sont laissées au lecteur. •

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Un procédé très efficace pour démontrer qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel est donné par la proposition suivante :

Théorème II.4 Soit E un K-espace vectoriel et S un ensemble (non vide) de vecteurs de E. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires formées d'un certain nombre de vecteurs de S, est un sous-espace vectoriel de E. On dit que c'est le sous-espace vectoriel engendré par S, on le note $\mathrm{vect}(S)$ et on dit que S est un **système générateur** de $\mathrm{vect}(S)$.

Preuve Soit S un ensemble de vecteurs de E et soient x et y deux combinaisons linéaires de vecteurs de S. Quitte à ajouter des vecteurs inutiles, avec des coefficients nuls, on peut supposer qu'il s'agit des mêmes vecteurs :

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i s_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{k} y_i s_i$$

où les x_i et les y_i sont des scalaires ($=$ éléments de K) et les s_i des éléments de S. Soit également $\lambda \in K$. On a alors

$$x + \lambda y = \sum_{i=1}^{k} x_i s_i + \lambda \sum_{i=1}^{k} y_i s_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i + \lambda y_i) s_i$$

et donc $x + \lambda y$ est une combinaison linéaire d'éléments de S. •

Si S ne contient qu'un vecteur non nul e, alors $\text{vect}(S) = \text{vect}(e)$ s'appelle la **droite vectorielle** engendrée par e. Ainsi, si $I_n = (a_{ij})$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ pour tout i, la droite engendrée par I est formée des matrices telles qu'il existe un scalaire λ tel que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = \lambda$ pour tout i. On dit que ce sont les **matrices scalaires.**

Un autre exemple, le sous-espace de $E = \mathscr{A}(I, \mathbb{R})$ des applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ engendré par les $x \mapsto x^k$ où $k \in \mathbb{N}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des **fonctions polynômes**.

2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

En géométrie, si on se place dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, l'intersection de deux plans vectoriels distincts est une droite vectorielle. Dans d'autres cas, ce peut être l'espace vectoriel nul. En général,

Théorème II.5 Soit E un K-vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve Tout d'abord, $F \cap G$ n'est pas vide puis que F et G contiennent chacun le vecteur nul. Soit maintenant x et y dans $F \cap G$, λ un scalaire : alors $x + \lambda y$ est dans F puisque F est un sous-espace vectoriel et que x et y sont dans F. De même, $x + \lambda y$ est dans G, donc, en définitive, dans $F \cap G$. •

Ⓡ
1. On peut généraliser à une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels.
2. Attention au cas de la géométrie : deux droites vectorielles ont toujours en commun au moins le vecteur nul, alors que deux droites « affine »(formées de points) peuvent n'avoir aucun point commun, leur intersection est vide.

3 Systèmes de vecteurs

3.1 Systèmes libres, liés

Si S est un ensemble de vecteurs, nous avons déjà considéré l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S. Nous allons nous limiter maintenant au cas où S est une liste finie $S = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dira alors que S est un **système de vecteurs.**

Définition II.4 On dit que $S = (u_i)_{i=1..k}$ est un **système lié**, s'il existe une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$, les coefficients (λ_i) n'étant pas tous nuls.

Une telle combinaison linéaire s'appelle une **relation de liaison**.

Définition II.5 On dit que $S = (u_i)_{i=1..k}$ est un **système libre**, s'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$, les coefficients (λ_i) n'étant pas tous nuls.

Autrement dit, le système est libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i=1..n} \in K^n,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Lorsque des vecteurs forment un système libre, on dit aussi qu'ils sont **indépendants**.

Les premiers exemples seront issus de la géométrie : dans l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, deux vecteurs forment un système liés si et seulement si ils sont colinéaires. Dans l'espace, trois vecteurs sont liés si et seulement si il sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan vectoriel).

Exercice II.1 Justifier ces affirmations. Dans le cas du plan, montrer que deux vecteurs sont liés si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées est nul. Dans l'espace, trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si le déterminant des leurs coordonnées est nul.

Concrètement, pour examiner si un système est lié, il faut partir d'un égalité de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$$

où les λ_i sont des scalaires, et chercher s'ils sont nécessairement tous nuls. On sera souvent amené à résoudre un système d'équations. Voici un exemple : On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, que nous représenterons par des matrices colonnes.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Et cherchons une relation de liaison de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

Cela conduit à résoudre un système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

La méthode du pivot montre qu'il y a une infinité de solutions, en particulier on trouve la liaison

$$-2u_1 - u_2 + u_3 = 0$$

Donnons quelques propriétés liées à ces notions.

Proposition II.5

- Le système (u) ne contenant qu'un seul vecteur est libre si u est non nul, lié si u est le vecteur nul.
- Le système (u, v) est lié si l'un des vecteurs est le produit de l'autre par un scalaire (on dit alors que les vecteurs sont colinéaires).
- Tout système contenant deux fois le même vecteur est lié.
- Tout sous-système d'un système libre est libre, tout sur-système d'un système lié est lié.

Preuve Les démonstrations sont immédiates. •

3.2 Systèmes générateurs, bases

Nous avons déjà rencontré la notion de système générateur dans le cadre d'un sous-espace vectoriel.

Définition II.6 Soit E un K-espace vectoriel, un système $(u_i)_{i=1..k}$ de vecteurs de E est un système générateur de E si $E = \text{vect}(u_i)_{i=1..k}$.

On omet souvent de préciser « de E ». Autrement dit, le système est générateur si tout vecteur x de E s'écrit

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_ku_k = \sum_{i=1}^{k} x_iu_i$$

où les (x_i) sont des scalaires.

Certains systèmes générateurs sont plus intéressants que d'autres.

Définition II.7 On dit qu'un système de vecteurs $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$ est une **base** de E si tout vecteur x de E s'écrit **de façon unique** comme

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

où les (x_i) sont des scalaires.

Dans ce cas précis, les (x_i) s'appellent les **coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

Une autre caractérisation des bases est très pratique.

Théorème II.6 Un système de vecteurs $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$ est une base si et seulement si c'est à la fois un système générateur de E et un système libre.

Preuve Montrons d'abord qu'une base est un système libre. Soit en effet une éventuelle relation de liaison :

$$0 = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \ldots + \lambda_ne_n$$

Comme par ailleurs le vecteur nul a évidemment comme coordonnées $(0, 0, \ldots, 0)$, l'unicité permet d'écrire :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

donc le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.
Réciproquement, supposons que $\mathscr{B}$ soit libre et générateur. Tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison des (e_i) ; supposons qu'il y ait deux écritures :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$$

alors on aurait

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

et la liberté permet de conclure que $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, etc... Il y a bien unicité des coordonnées. •

– Dans le cas des vecteurs de la géométrie, on retrouve la notion bien connue des coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. (pour le cas du plan).

– Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur x peut s'écrire

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

On note alors e_i le vecteur dont le coefficient à la position i est égal à 1, tous les autres étant nul, et l'égalité précédente s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et cette écriture est unique. Le système $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$ est alors une base, que l'on appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

– Dans le cas de l'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, la base canonique est formé des matrices E_{ij} dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice i, j qui vaut 1. Ces $n \times p$ matrices constituent la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

– Dans le cas de l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$. Remarquons que dans cet exemple, la base (on parle encore de base canonique) contient une infinité de vecteurs.

4 Dimension d'un espace vectoriel

Dans cette section, on suppose que E admet un système générateur ayant un nombre fini d'éléments. Un premier petit résultat :

Lemme II.1 S'il existe un système générateur de E, noté $\mathscr{G}$ de E ayant un nombre fini d'éléments, alors tout système générateur $\mathscr{G}'$ de E contient un sous-système générateur ayant un nombre fini d'éléments.

Preuve Notons x_1, x_2, $\ldots x_n$ les éléments de $\mathscr{G}$. Alors pour tout i de 1 à n, x_i est combinaison linéaire de vecteurs $y_{i,j}$ appartenant à $\mathscr{G}'$, puisque cette partie est génératrice de E. Ces vecteurs sont en nombre fini. Tout vecteur de E est combinaison linéaire des x_i donc des $y_{i,j}$: la partie $\mathscr{G}'$ contient donc un sous-système générateur fini. •

Un autre résultat technique.

Lemme II.2 Soient x_1,x_2,$\ldots$,x_n, n vecteurs. On suppose que y_1, y_2,$\ldots y_m$ sont dans $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Alors, si $m > n$, le système (y_i) est lié.

En particulier, si E admet un système générateur fini, tous les systèmes libres sont finis.

Preuve On va procéder par récurrence sur n.

1. Soit $n = 1$ et x_1 non nul (sinon tous les y_i sont nuls). On a donc des vecteurs y_1, y_2,.... Si y_1 ou y_2 est nul, le système des (y_i) est lié. Sinon, $y_1 = a_1 x_1$ et $y_2 = a_2 x_2$ donc $a_2 y_1 - a_1 y_2 = 0$, les a_i étant non nuls, cela donne une relation de liaison entre les (y_i).

2. Supposons la proposition vraie pour $n-1$ et prenons n vecteurs $x_1, x_2, \dots x_n$. Les y_i peuvent s'écrire :

$$\begin{array}{lllllllllll} y_1 & = & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & +a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & & & \dots & \dots & +a_{2n}x_n \\ \vdots & = & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \dots & \dots & & & +a_{mn}x_n \end{array}$$

Si les (a_{i1}) sont tous nuls, alors les (y_i) sont combinaison de $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ et comme $m > n > n-1$, l'hypothèse de récurrence s'applique, ils forment un système lié. Sinon, un des coefficients de cette première colonne est non nul : mettons a_{11}, quitte à renuméroter. Agissons ensuite comme dans la méthode du pivot : pour $i = 2$ jusqu'à $i = m$, on calcule $y_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}y_1$: ces $m-1$ vecteurs s'écrivent alors comme combinaisons linéaires de $x_2, x_3, \dots, x_n$. Comme $m-1 > n-1$ l'hypothèse de récurrence s'applique et ils forment un système lié. La relation de liaison s'écrit :

$$\lambda_2(y_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1) + \lambda_3(y_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}y_1) + \dots + \lambda_m(y_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}y_1) = 0$$

et, en développant, on obtient une relation de liaison entre y_1, y_2,. . . ,y_m, qui forment donc un système lié. •

Ce lemme montre que, s'il existe un système générateur fini, un système est lié dès qu'il dépasse un certain seuil,

Preuve

On peut maintenant en venir au célèbre théorème de la base incomplète.

Théorème II.7 — de la base incomplète On suppose que E admet un système générateur fini. Soit $\mathscr{L}$ une partie libre de E, et $\mathscr{G}$ un système générateur. Alors on peut compléter la partie libre avec des éléments de $\mathscr{G}$ pour obtenir une base de E

Preuve Commençons par extraire de $\mathscr{G}$ un sous-ensemble fini $\mathscr{G}'$. On peut réunir $\mathscr{L}$ et $\mathscr{G}'$, cela donne un ensemble de vecteurs $\{g_1, g_2, \dots, g_p, \dots, g_n\}$ et on supposera que les éléments de $\mathscr{L}$ sont les p premiers. Cet ensemble est encore générateur. On peut compléter $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de cet ensemble et examiner si le nouveau système est encore libre. Supposons qu'alors (quitte à renuméroter), la suite $\{g_1, g_2, \dots, g_p, \dots, g_m\}$ soit libre de cardinal maximal (on en trouve une car il y a un nombre fini de vérifications à faire). Il est alors facile de montrer que cet ensemble est une base : en effet, un vecteur de $\mathscr{G}'$ est soit déjà dans la famille, soit c'est une combinaison linéaire de vecteurs de la famille, sinon, en l'ajoutant, on obtiendrait un système libre ayant un vecteur de plus. •

On en vient au résultat essentiel de la section.

Théorème II.8 — de la dimension Soit E un espace vectoriel ayant un système générateur fini. On suppose que E n'est pas réduit au vecteur nul. Alors :

1. Il existe une base ayant un nombre fini n de vecteurs.
2. Toutes les bases on le même nombre n d'éléments : ce nombre est appelé la dimension de E.
3. Tout système libre a moins de n éléments. S'il en a exactement n, c'est une base.
4. Tout système générateur a plus de n éléments. S'il en a exactement n, c'est une base.

Définition II.8 Dans les condition du théorème, le nombre n s'appelle la **dimension** de E et on dit que E est de **dimension finie**.

Preuve
1. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe une base : il suffit de partir d'un vecteur non nul, qui forme un système libre.
2. Soit $(x_i)_{i=1..n}$ et $(y_i)_{i=1..m}$ deux bases. Comme les y_i sont combinaisons des (x_i) et forment un système libre, on a $m \leqslant n$. Mais en échangeant les rôles, on a aussi $n \leqslant m$, donc $n = m$.
3. C'est encore une application du lemme : un système libre $\mathscr{L}$ a au plus n éléments. S'il en a exactement n, montrons que c'est une base. Sinon, en effet il existerait un vecteur y qui ne serait pas dans $\text{vect}(\mathscr{L})$, mais alors (comme dans le théorème de la base incomplète) $\text{vect}(\mathscr{L}) \cup \{y\}$ serait libre, ce qui contredit le lemme.
4. Par l'absurde, si une partie génératrice $\mathscr{L}$ a strictement moins de n vecteurs, alors les vecteurs d'une base seraient liés, par application du lemme. Si $\mathscr{G}$ a exactement n éléments, elle ne peut-être liée, sinon un de ses vecteurs serait combinaison linéaire des autres et en l'enlevant, on obtiendrait une partie génératrice à $n-1$ vecteurs.
5. ouf... •

D'après nos études préalables, les espaces vectoriels K^n, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $K_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies, respectivement n, np et $n+1$.

Par contre $K[X]$ est de dimension infinie, car il admet une base ayant un nombre infini d'éléments. Il en va de même pour l'ensemble des applications de X dans K, dès que X ou K est infini.

Pour terminer, donnons un théorème très utile dans la pratique.

Théorème II.9 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors si F est un sous-espace vectoriel de E, il est aussi de dimension finie, et cette dimension est inférieure à n.

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors F est égal à E.

Preuve C'est une conséquence immédiate des théorèmes précédents. •

5 Somme de sous-espaces vectoriels

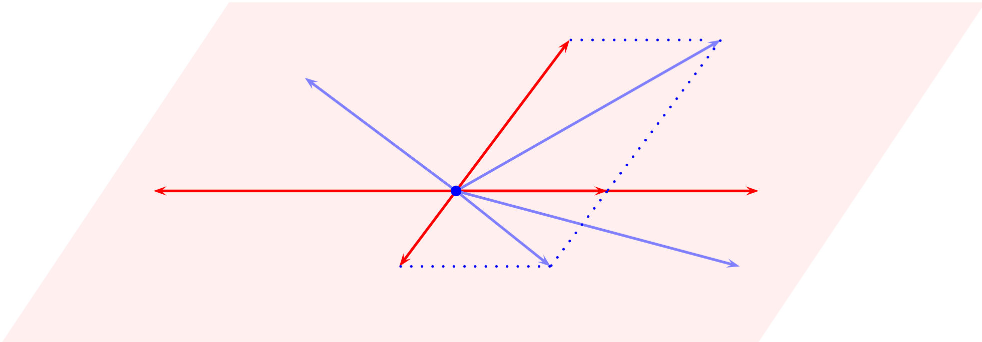
5.1 Somme

Commençons par le rappel : si E est un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels alors $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de E, inclus dans F et dans G. Par contre, la réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. On définit ainsi la somme de deux sous-espaces par :

Définition II.9 Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces. La somme de F et G est l'ensemble noté $F+G$ défini par

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (f,g) \in F \times G,\ x = f + g\}$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des sommes d'un élément de F par un élément de G.



Le résultat essentiel

Proposition II.6 La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, c'est le plus petit qui contient à la fois F et G

Preuve Immédiate. •

Remarquons qu'un cas particulier est déjà connu : si $F = \mathrm{vect}(x)$ et $G = \mathrm{vect}(y)$, alors $F + G = \mathrm{vect}(x, y)$.

Ⓡ On peut définir la somme d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels. Il y a alors « associativité. »

5.2 Somme directe de deux sous-espaces, supplémentaires

Si $S = F + G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, tout vecteur de S s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Nous nous intéressons au cas où il y a unicité de cette écriture.

Définition II.10 Soit $S = F + G$ une somme de sous-espaces vectoriels de E, si tout vecteur de S s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on dit que F et G sont en **somme directe**, et on écrit

$$S = F \oplus G$$

Si de plus $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont deux **sous-espaces supplémentaires.**

Ainsi, pour l'espace $\mathscr{P}$ des vecteurs du plan, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires. Dans l'espace $\mathscr{E}$ des vecteurs de l'espace, un plan et une droite non incluse dans le plan sont supplémentaires.

On peut généraliser à la somme de plusieurs sous-espaces. La notion de somme directe est en liaison avec la notion de base : dire que $(e_i)_{i=1..n}$ est une base de E équivaut à dire que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{vect}(e_i)$$

Il existe un critère simple pour reconnaître que **deux** sous-espaces sont en somme directe :

Théorème II.10 La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Preuve 1. Supposons que la somme soit directe et soit $x \in F \cap G$. Le vecteur x étant dans F, on peut l'écrire dans la somme $F+G$:

$$x = x + 0$$

Mais il est aussi dans G, et on peut l'écrire

$$x = 0 + x$$

Par unicité, on a donc $x = 0$.

2. Supposons que $F \cap G = \{0\}$ et soit x un élément de la somme $F+G$. Admettons que l'on puisse écrire

$$x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$$

où $(f_1, f_2) \in F^2$ et $(g_1, g_2) \in G^2$. Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$ donc $f_1 - f_2 = 0$ et $g_1 - g_2 = 0$, il y a unicité. •

Attention, lorsqu'il y a un nombre plus élevé de sous-espaces vectoriels, le critère de somme directe est un peu plus compliqué.

Donnons un autre critère.

Proposition II.7 La somme $S = F + G$ est directe si et seulement si il existe une base de S qui est la réunion disjointe d'une base de F et d'une base de G.

Réunion disjointe signifie que la base de F et la base de G n'ont aucun vecteur en commun. La démonstration est laissée en exercice. Remarquons qu'on en déduit

Proposition II.8 Si $S = F \oplus G$ alors $\dim S = \dim F + \dim G$.

Par contre, dans le cas général d'une somme non forcément directe, citons :

Théorème II.11 — formule de Grassmann Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Terminons par un théorème utile sur les sous-espaces supplémentaires :

Théorème II.12 Soit E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire.

La démonstration utilise le théorème de la base incomplète.

Le théorème à savoir : la somme de deux sous-espaces vectoriels est une somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul. (th.II.10)