III — Applications linéaires et matrices

1 Notion d'application linéaire

1.1 Définition et exemples

On s'intéresse aux applications entre deux K-espaces vectoriels qui, d'une certaine façon conservent les opérations.

Définition III.1 Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels sur le corps K. On dit que f est une application linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et

$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in K,\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$$

Remarquons une conséquence immédiate de la définitioon.

Proposition III.1 Si F est linéaire de E dans F, alors

$$f(0_E) = 0_F$$

Preuve $f(0_E) = f(0_K 0_E) = 0_k f(0_E) = 0_F$ •

Cette proposition est d'utilisation constante. Elle peut aussi servir pour les contre-exemples.

Il y a des exemples simples d'applications qui vérifient cette propriété : la première est **l'application constante nulle**, qui à tout vecteur de E associe le vecteur nul de F. Donnons un exemple plus important.

Proposition III.2 Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires de la forme $f(x) = ax$ où a est une constante réelle.

Preuve Il suffit d'observer que, par la seconde propriété, $f(x) = f(x.1) = xf(1)$. On pose alors $a = f(1)$ et on vérifie que la première propriété est satisfaite. •

Les applications linéaires s'avèrent donc la généralisation des fonctions linéaires.

Donnons quelques exemples supplémentaires :

1. L'application de $K[X]$ dans $K[X]$ qui à $P(X)$ associe son polynôme dérivé est K-linéaire ; preuve :

$$(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$$

   Il en va de même pour l'application qui à une fonction dérivable associe sa fonction dérivée (en précisant espace vectoriel de départ et espace vectoriel d'arrivée).

2. L'application de K^2 dans K définie par :

$$x = (x_1, x_2) \mapsto ax_1 + bx_2$$

   est une application linéaire de K^2 dans K, tandis que $x = (x_1, x_2) \mapsto 2x_1x_2$ ne l'est pas.

3. L'application de K^2 dans K^2 définie par :

$$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

   est une application linéaire.

4. Si E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

Vocabulaire :

- Une application linéaire de E à valeur dans K s'appelle une **forme linéaire**.
- Une application linéaire de E dans lui-même s'appelle un **endomorphisme**.
- Une application linéaire de E dans F qui est bijective s'appelle un **isomorphisme**.
- Vocabulaire facultatif : un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

Dans les exemples précédents, il y a un certain nombre de formes linéaires.

1.2 Matrices d'une application linéaire

Lorsque E et F sont de dimension finie, il existe une façon très pratique de représenter les applications linéaires.

Supposons E muni d'une bas $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$, donc E est de dimension n, tandis que F est rapporté à $\mathscr{C} = (u_i)_{i=1..p}$, donc F est de dimension p.

Définition III.2 Si x est un vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont les scalaires $(x_i)_{i=1..n}$, on appelle matrice de x dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(x)$ formée des (x_i).

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on la notera X. Ainsi,

$$X = M_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Commençons ensuite par la proposition

Proposition III.3 Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est entièrement déterminée par les images $f(e_i)$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$

Preuve Il suffit d'écrire

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

•

Ce théorème signifie qu'il suffit de connaître l'image d'une base pour connaître une application linéaire. Si l'espace d'arrivée est F, muni de la base $\mathscr{C}$, on pourra noter, pour tout $j = 1..n$:

$$M_{\mathscr{C}}(f(e_j)) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

où les $(a_{i,j})$ sont des scalaires.

Définition III.3 La matrice formée des colonnes $M_{\mathscr{C}}(f(e_j))$ pour $j = 1..n$ est appelée matrice de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

On la note $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, ou A s'il n'y a pas d'ambiguïté. Avec les notations précédentes,

$$A = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{i=1..p,j=1..n}$$

L'intérêt d'une matrice est de « représenter »l'application f, mais pas seulement. Rappelons comment on définit le produit de deux matrices (produit lignes par colonnes)

Définition III.4 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ alors le produit AB est une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ définie par :

$$C = (c_{ij}), \quad \text{avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

et cela pour i variant de 1 à n et j de 1 à q.

Cette définition se visualise... On dit que l'on fait le produit « lignes par colonnes ».

Appliquons ce produit à notre situation :

Proposition III.4 Si f est une application de E dans F, on a

$$M_{\mathscr{C}}(f(x)) = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times M_{\mathscr{B}}(x)$$

Autrement dit, et avec les notations abrégées, si $y = f(x)$, alors $Y = AX$.

Preuve C'est un calcul... •

Exercice III.1 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que la dérivation D est un endomorphisme de E. Écrire la matrice de D par rapport à la base canonique. Utiliser cette matrice pour déterminer la dérivée du polynôme $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + X - 7$.

1.3 Noyau, image, effet sur les systèmes de vecteurs

Proposition III.5 Soit f une application linéaire de E dans F.

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $f(E')$ défini par

   $$f(E') = \{y \in F \mid \exists x \in E',\ y = f(x)\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F. On dit que c'est l'image de E'.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, l'ensemble $f^{-1}(F')$ défini par Si

   $$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

   est un sous-espace vectoriel de E, appelé image réciproque de F'.

Preuve
1. Soit y et y' dans $f(E')$, avec λ dans K. Alors, il existe x et x' dans E' tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a donc

   $$y + \lambda y' = f(x) + \lambda f(x') = f(x + \lambda x')$$

   puisque f est linéaire. Comme E' est un sous-espace vectoriel, $x + \lambda x' \in E'$ et $y + \lambda y' \in f(E')$.
2. Prenons x et x' dans $f^{-1}(F')$ et $\lambda \in K$. Alors

   $$f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x') \in F'$$

   puisque F' est un sous-espace vectoriel. On en conclut que $x + \lambda x'$ est dans $f^{-1}(F')$. •

Regardons des cas particuliers importants.

Définition III.5 Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels. On appelle **noyau** de f, noté $\operatorname{Ker} f$, l'image réciproque du sous-espace vectoriel $\{0_F\}$. Autrement dit :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

D'après l'étude précédente, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E. Un exemple, si $E = K[X]$ et si f est la dérivation, $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des polynômes constants. Le rôle important du noyau est illustré par le théorème suivant.

Théorème III.1 Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels. On a l'équivalence

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

Preuve Remarquons bien sûr que le vecteur nul est toujours dans le noyau (parce que $f(0) = 0$). Démontrons maintenant $\Rightarrow$.

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0 \iff f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$$

en utilisant l'injectivité.

Démontrons l'autre implication. Soit (x, y) un couple d'éléments de E. On suppose que $f(x) = f(y)$. Alors,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \iff x - y = 0$$

en utilisant que le noyau est réduit à 0. Ainsi, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, pour tout (x, y), f est injective. •

Définissons maintenant l'image.

Définition III.6 Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F \,[\, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

Autrement dit, c'est l'image de E, au sens défini précédemment, c'est l'ensemble des images des vecteurs de E.

Proposition III.6 $$f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F$$

La démonstration est inutile : c'est une réécriture de la surjectivité.

Ⓡ La recherche du noyau se fait en résolvant un système. Pour l'image, on peut remarquer que si $\mathscr{B} = (e_i)$ est une base, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_i))$. Donc l'image de f est le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice de f.

Quelques résultats qui peuvent être utiles.

Proposition III.7
1. f est injective si et seulement si l'image d'un (de tout) système libre est un système libre.
2. f est surjective si et seulement si l'image d'un (de tout) système générateur est un système générateur.
3. f est bijective si et seulement si l'image d'une (de toute) base est une base.

Preuve
1. Soit $(u_i)_{i=1..k}$ un système libre et f injective. Alors, avec des scalaires (λ_i) quelconques,

$$\sum_i \lambda_i f(u_i) = 0 \iff f(\sum_i \lambda_i u_i) = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i u_i \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \sum_i \lambda_i u_i = 0$$

et on conclut par la liberté des (u_i).

2. Supposons que f soit surjective et que (g_i) soit générateur. Si y quelconque est dans F, puisque f est surjective, il existe x dans E tel que $y = f(x) = f\left(\sum_i x_i u_i\right)$. En utilisant la linéarité, on voit que y est combinaison linéaire des $f(u_i)$ qui constituent donc un système de générateurs.
3. La dernière proposition est obtenue à l'aide des deux premières. Les réciproques sont laissées au lecteur. •

En particulier, deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

1.4 Projections et symétries

Dans ce paragraphe, nous illustrons les notions d'image et de noyau par des exemples très importants d'endomorphismes.

Définition III.7 On appelle projection (ou projecteur) un endomorphisme $p : E \to E$ vérifiant

$$p \circ p = p$$

et on appelle symétrie un endomorphisme $s : E \to E$ tel que

$$s \circ s = \mathrm{id}_E$$

Ces endomorphismes sont la version vectorielle des transformations géométriques appelées aussi projections et symétries.

En commençant par les projections, nous allons retrouver cet aspect géométrique.

Théorème III.2 Soit p une projection. Alors $\operatorname{Im} p = E_1$ et $\operatorname{Ker} p = E_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires. De plus, si x s'écrit $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, on a $p(x) = x_1$. On dit que p est la projection sur E_1 suivant (ou parallèlement à) E_2.

Preuve Montrons que E est somme directe de $E_1 = \operatorname{Im} p$ et $E_2 = \operatorname{Ker} p$. Posons en effet $x = p(x) + (x - p(x))$. Si on pose $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - p(x)$, alors $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$ puisque

$$p(x_2) = p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(c) = p(x) - p(x) = 0$$

On a donc montré que $E = E_1 + e_2$. Montrons maintenant que la somme est directe. Soit $y \in E_1 \cap E_2$. On a

$$\exists x \in E,\ y = p(x) \qquad p(y) = 0$$

On en déduit

$$y = p(x) = p \circ p(x) = p(y) = 0$$

On a bien montré que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et la somme est directe. Enfin, l'unicité de la décomposition montre que l'image $p(x)$ de tout vecteur x est le premier vecteur dans la décomposition de x dans la somme directe $E_1 \oplus E_2$. •

De la même façon, on peut caractériser les symétries.

Théorème III.3 Soit s une symétrie. Alors $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = E_1$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires. De plus, si x s'écrit $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, on a $s(x) = x_1 - x_2$. On dit que s est la symétrie par rapport à E_1 suivant (ou parallèlement à) E_2.

Preuve On peut introduire $p = 2s - id_E$ et vérifier que $p \circ p = p$ équivaut à $s \circ s = \mathrm{id}_E$. •

2 Théorème du rang, les ensembles $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$

2.1 Théorème du rang

Ce théorème est un des plus importants sur les applications linéaires.

Théorème III.4 — du rang Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimensions finies et

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

Avant de donner la démonstration, justifions le nom du théorème par la définition

Définition III.8 Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on appelle rang de f la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} f$.

La théorème du rang se reformule

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$$

Preuve Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$ est inclus dans E : grâce au théorème de la base incomplète, on sait qu'il admet un sous-espace supplémentaire. On en choisit un, que l'on notera S. Soit alors g l'application définie par :

$$\begin{array}{rrl} g: & S \to & \operatorname{Im} f \\ & x \mapsto & g(x) = f(x) \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on a restreint f au départ et à l'arrivée. L'application g est linéaire puisque c'est une restriction de f. Elle est injective, en effet

$$x \in \operatorname{Ker} g \iff x \in \operatorname{Ker} f \cap S \Rightarrow x = 0$$

puisque $\operatorname{Ker} g$ et S sont en somme directe. Montrons également que g est surjective. En effet, si $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x n'est pas forcément dans S, mais, dans la somme directe $\operatorname{Ker} f \oplus S$, il peut s'écrire $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in S$. Mais alors $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$, puisque $x_1 \in \operatorname{Ker} f$. Donc $y = f(x_2) = g(x_2)$ puisque $x_2 \in S$, et g est surjective.

Ainsi, S et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes ; ils ont donc même dimension. Comme $\operatorname{Ker} f$ et S sont supplémentaires dans E, on a :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim S = \dim E \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$ •

Un petit corollaire, qui peut aussi se démontrer directement.

Corollaire III.1 Soit f une application linéaire de E dans F. Alors l'image $f(E_1)$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale.

Mais le plus important est le théorème sur les endomorphismes.

Corollaire III.2 Soit f une application linéaire de E dans E. On suppose que E est de dimension finie. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Preuve C'est une application immédiate du théorème du rang : si f est injective, son noyau est de dimension 0, donc l'image a pour dimension $\dim E$. Mais comme elle est incluse dans E, elle est égale à E, c'est-a-dire que f est surjective. L'autre implication sedémontre de la même façon. •

l'intérêt de ce théorème est indéniable : dans le cas d'un endomorphisme, il suffit de vérifier l'injectivité (ce qui est souvent le plus facile) pour avoir la bijectivité.

2.2 Opérations sur les applications linéaires

Dans l'algèbre linéaire, tout est espace vectoriel... Si, par exemple on s'intéresse non seulement à une application linéaire de E dans F, mais à toutes les applications linéaires de E dans F, on récupère... un espace vectoriel.

Proposition III.8 Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, alors $f+g$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ est aussi une application linéaire. De même, pour tout $\lambda \in K$, $\lambda.f$ est linéaire.

Preuve La preuve est immédiate :

$$\begin{aligned}(f+g)(x+\lambda y) &= f(x+\lambda y)+g(x+\lambda y) \qquad \text{(def. de la somme } f+g)\\ &= f(x)+\lambda f(y)+g(x)+\lambda g(y) \qquad (f \text{ et } g \text{ sont linéaires})\\ &= (f+g)(x)+\lambda(f+g)(y) \qquad \text{(def. de la somme } f+g)\end{aligned}$$

même démonstration pour $\lambda.f$. •

Remarquons, à titre d'exemple les faits suivants :

1. Si $f = \mathrm{id}_E$, alors $\lambda.f = \lambda.\mathrm{id}_E$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.
2. Si f est un endomorphisme de E, les vecteurs « invariants »forment un sous-espace vectoriel. En effet, ce sont les éléments de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$. Il est bien sûr possible qu'il n'y ait que le vecteur nul qui soit invariant.

Définition III.9 Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Alors l'ensemble noté $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F peut être muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

Après la somme et le produit par un scalaire, intéressons nous à la composition (loi « rond »).

Proposition III.9 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre K espaces vectoriels. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.
L'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E est un anneau pour la loi $+$ et la loi $\circ$. Comme c'est aussi un K-espace vectoriel, on dit que c'est une K-algèbre.

Preuve $$(g\circ f)(x+\lambda y) = g\left(f(x+\lambda y)\right) = g(f(x)+\lambda f(y)) = g\circ f(x)+\lambda g\circ f(y)$$

Nous ne vérifierons pas les autres propriétés, comme la distributivité. Rappelons que l'élément neutre pour l'addition est l'endomorphisme constant nul, noté 0. Pour la loi $\circ$, c'est l'endomorphisme défini par $x \to x$, c'est-à-dire l'identité de E, noté id_E. •

Théorème III.5 Si f de E dans F est une application linéaire bijective, alors f^{-1} est aussi linéaire. L'ensemble des endomorphismes bijectifs (automorphismes) de E est un groupe pour la loi $\circ$, noté $\mathbf{GL}(E)$, et appelé groupe linéaire de E.

Preuve Supposons que f soit bijective, et soit x, y deux vecteurs de F, λ un scalaire. Alors, si $t = f^{-1}(x)+\lambda.f^{-1}(y)$ on a

$$f(t) = f\left(f^{-1}(x)+\lambda.f^{-1}(y)\right) = f(f^{-1}(x)+\lambda f(f^{-1}(y)) = x+\lambda y$$

donc $t = f^{-1}(x + \lambda y)$. On a donc démontré

$$= f^{-1}(x + \lambda y) = f^{-1}(x) + \lambda . f^{-1}(y)$$

On a démontré que f^{-1} est linéaire.

Une remarque importante, le composé de deux endomorphismes inversibles est lui-même inversible, puisque l'on a :

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{id}_E \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$$

de même de l'autre côté. Ainsi

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

•

3 Matrices

3.1 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Il y a une correspondance entre les opérations sur les applications linéaires et les matrices. Cela permet d'identifier d'autant mieux les ensembles, moyennant le choix de bases.

Proposition III.10 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies resp. n et p, munis de bases $\mathscr{B} = (e_i)$ et $\mathscr{C} = (u_i)$. Alors

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f + g) = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g), \qquad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda . f) = \lambda . M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

pour tout $(f, g) \in (L)(E, F)$ et $\lambda \in K$. Les espaces vectoriels $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ sont isomorphes.

Preuve On sait déjà que l'application qui à f associe sa matrice est bijective. De plus, comme $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$, la matrice de $f + g$ est la somme de la matrice de f et de la matrice de g. •

Corollaire III.3 L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ pour dimension $\dim E \times \dim F$.

Proposition III.11 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies p, n et ℓ, munis de bases $\mathscr{B} = (e_i)$, $\mathscr{C} = (u_i)$ et $\mathscr{D} = (h_i)$ Alors

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = M_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

lorsque $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires. En particulier, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$ sont des K-algèbres isomorphes.

Preuve En effet, $g \circ f(e_i) = g(f(e_i))$ et donc le produit de la matrice de g par chacune des colonnes de la matrice de f donne une matrice ayant pour colonnes les matrices de coordonnées des $g \circ f(e_i)$. •

Corollaire III.4
1. La multiplication des matrices est associative.
2. L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(K)$ est un anneau, isomorphe à $\mathscr{L}(E)$.
3. Dans cet anneau, l'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n définie par

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Travailler sur les espaces vectoriels de dimension finies équivaut à travailler sur les matrices.

3.2 Matrices inversibles

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible s'il existe A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Proposition III.12 Soit E de dimension finie n. L'ensemble des matrices inversibles forme un groupe isomorphe au groupe linéaire $\mathbf{GL}(E)$. On le note $\mathbf{GL}_n(K)$.

Rappelons que l'on peut repérer un automorphisme grâce à son noyau (qui doit être réduit à 0), ou à son image (qui doit coïncider avec l'espace tout entier). Il existe plusieurs façons de calculer l'inverse d'une matrice. Donnons ici le procédé qui repose sur la définition.

Proposition III.13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, X et Y les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Alors A^{-1} existe s'il existe une solution unique au système

$$AX = Y$$

où les coefficients de X sont les inconnues. On a alors

$$X = A^{-1}Y$$

Exemple : soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

alors $AX = Y$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 = y_2 \end{cases}$$

On résout ce système, par exemple par combinaison d'équations, et l'on obtient

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}y_1 - 2Y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Rang d'un système de vecteurs, rang d'une matrice

Nous avons déjà rencontré le mot « rang »dans le cadre du théorème du rang : le rang d'une application linéaire est la dimension de son image. Si on considère un système fini de vecteur, on définira de même son rang par :

Définition III.10 Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ des vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension p. On appelle rang du système la dimension du sous-espace engendré par les (u_i). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$, on appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace engendré par ses colonnes, considérées comme éléments de K^p.

Ainsi le rang de A sera toujours inférieur ou égal au maximum de n et de p.

Exemples :

1. Une matrice est de rang 0 si et seulement si elle est nulle.
2. Une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si elle est de rang n.
3. Une matrice **échelonnée en ligne** a pour rang le nombre de ses « pivots ». Quelques explications : on dit qu'une matrice est échelonnée en ligne si :
   - Si une ligne est nulle, toutes les suivantes sont nulles.
   - Le premier élément non nul d'une ligne (s'il existe) s'appelle un pivot.
   - Le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que le pivot des lignes précédentes.

   Voici un exemple, où les "*" représentent des coefficients quelconques (nuls ou non nuls), a b et c sont non nuls :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & b & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Le rang est trois car le sous-espace engendré par les colonnes est le sous-espace engendré par les trois colonnes qui contiennent un pivot, et ces colonnes forment un système libre (immédiat).

Donnons maintenant quelques propriétés du rang. Mais commençons par décrire les opérations élémentaires.

Définition III.11 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. On notera (L_i) les lignes de A. On appelle opération élémentaire sur les lignes de A l'une des trois opérations suivantes :

- Échange entre la ligne L_i et la ligne L_j (i différent de j). On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Remplacement de la ligne L_i par la ligne αL_i où α est un scalaire non nul. On la note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Remplacement de la ligne L_i par la somme d'elle-même et de αL_j. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes. L'intérêt de ces opérations repose sur la proposition suivante :

Proposition III.14 Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne changent pas le rang d'une matrice.

C'est immédiat en ce qui concerne les colonnes : le sous-espace engendré ne change pas par une opération élémentaire. En ce qui concerne les lignes, la démonstration utilise le théorème sur les matrices équivalentes.

On peut alors appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice : la méthode du pivot, sans la formaliser, consiste à transformer par opérations sur les lignes, une matrice en une matrice échelonnée, afin d'en déterminer le rang.

4 Changement de base

4.1 Matrices de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1..n}$ et $\mathscr{B}' = (e'_i)_{i=1..n}$ deux bases.

Définition III.12 On appelle matrice de passage, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des (e'_i) dans la base (e_i).

Théorème III.6 Soit $x \in E$ est un vecteur de E. Notons P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, X et X' les matrices colonnes des coordonnées de x par rapport aux bases $\mathscr{B}$ resp. $\mathscr{B}'$. Alors

$$X = PX'$$

Preuve On note (p_{ij}) les coefficients de la matrice de passage, et p_{ij} est ainsi la i-ème coordonnée du vecteur e'_j, donc :

$$x = \sum_j x_j e_j = \sum_j x'_j e'_j = \sum_j x'_j \left(\sum_i p_{ij} e_i \right) = \sum_i \left(\sum_j p_{ij} x'_j \right) e_i$$

•

Corollaire III.5 Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.

4.2 Matrices équivalentes

Supposons maintenant que f est une application linéaire de E dans F. On a défini ce qu'est la matrice de f par rapport à des bases $\mathscr{B}$ pour E et $\mathscr{C}$ pour f.

Que se passe-t-il si l'on change de base, dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée ?

Théorème III.7 Soit f une application linéaire de E dans F, $(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ des bases de E (resp. de F). Alors si $A = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = M_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$, et si P et Q sont les matrices de passage,

$$A' = Q^{-1}AP$$

Preuve
$$\left.\begin{array}{r} Y = AX \\ X = PX' \\ Y = QY' \end{array}\right\} \Rightarrow QY' = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$$
•

Définition III.13 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$; on dit qu'elles sont **équivalentes** s'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

Autrement dit, elles représentent la même application linéaire par rapport à des bases différentes. Un théorème permet de reconnaître quand des matrices sont équivalentes :

Théorème III.8 Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Preuve admise •

Un peu de vocabulaire : si $A = (a_{ij})$ est une matrice, la matrice de coefficients $b_{ij} = a_{ij}$ s'appelle la matrice transposée de A. Elle est notée ${}^tA$.

Théorème III.9 La matrice A et la matrice ${}^tA$ ont le même rang.

Ce théorème se démontre au cours de la démonstration du théorème précédent.

4.3 Matrices semblables

Plaçons nous maintenant dans le cas d'un endomorphisme. On suppose que f est dans $\mathcal{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base et A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Si on se donne un nouvelle base $\mathscr{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, alors

Théorème III.10 On a la formule de changement de base pour les endomorphismes

$$A' = P^{-1}AP$$

De même que l'on définit les matrices équivalentes, on définit

Définition III.14 Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites **semblables** s'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

Cela signifie que A et B représentent le même endomorphisme par rapport à des bases différentes.

Il est beaucoup plus difficile de reconnaître si deux matrices sont semblables. Cette question sera réétudiée en seconde et en troisième année.

Dans ce chapitre, les théorèmes à connaître sont :

1. Une application linéaire est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
2. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors l'image de E', sous-espace vectoriel de E, est un sous-espace vectoriel de F.