IV — Systèmes linéaires, déterminants

1 Systèmes linéaires

1.1 Définition, exemples

Définition IV.1 Un système linéaire ayant n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et p équations est une suite d'égalités :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = y_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n & = y_n \end{cases}$$

où les (a_{ij}) et les (y_i) sont des constantes.

Si les coefficients y_1, y_2,...,y_n sont tous nuls, on dit que le système linéaire est **homogène**. Résoudre un système linéaire, c'est chercher l'ensemble des éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ de K^n tels que les égalités soient simultanément vraies. On dit que c'est l'ensemble des solutions du système S.

Cet ensemble peut être vide

1.2 La méthode du pivot

On définit les opérations élémentaires sur les lignes d'un système exactement comme on l'a fait dans le chapitre précédent pour les matrices : attention, il s'agit cette fois des lignes "complètes", c'est-à-dire en incluant le second membre. La méthode du pivot repose sur la proposition :

Proposition IV.1 Un système S a le même ensemble de solutions qu'un système S' obtenu par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

Preuve Immédiate. •

Il suffit alors d'obtenir un système où les coefficients (a_{ij}) forment une matrice échelonnée en ligne pour résoudre le système initial, en commençant par les dernières équations.

Exemples : résoudre

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

1.3 Interprétation d'un système linéaire

Si on note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, Y la matrice colonne $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ et A la matrice des coefficients $(a_{ij}$, un système peut toujours s'écrire,

$$AX = Y$$

On peut alors interpréter le système dans le cadre des espaces vectoriels K^n et K^p : A est la matrice (par rapport aux base canoniques) d'une application linéaire de K^n dans K^p, et résoudre un système, c'est chercher les antécédents du vecteur Y.

D'autres interprétations sont possibles, par exemple la recherche de l'écriture de Y en fonction des colonnes de A. Nous en tirons les conséquences suivantes :

Proposition IV.2 L'ensemble des solutions d'un **système homogène** est un sous-espace vectoriel de K^n.

Un système non homogène admet :
- soit aucune solution, on dit que le système est **incompatible**.
- soit une seule solution
- soit une infinité de solutions de la forme $X_0 + Z$ où X_0 est une solution particulière et Z une solution quelconque du système homogène.

Preuve Soit f l'application linéaire de matrice A. Le système s'interprète comme la recherche de x tel que $f(x) = y$.

1. Si $y = 0$, alors l'ensemble des solutions est $\operatorname{Ker} f$, c'est un sous-espace vectoriel.
2. Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe x_0 tel que $f(x_0) = y$. Mais alors $f(x) = y$ équivaut à $f(x) = f(x_0)$ c'est-à-dire $x - x_0 \in \operatorname{Ker} f$. Dans le cas où $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, la solution est unique, sinon il y a une infinité de solutions.
3. Si $y \notin \operatorname{Im} f$, il n'y a pas de solution. •

2 Déterminants

2.1 Rappels : dimension 2 et dimension 3

On rappelle que si l'on se place dans K^2 et si deux vecteurs u et v ont pour coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2), le déterminant de ces vecteurs est défini par

$$\det(u,v) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

De même, si on se place dans K^3 et si trois vecteurs u, v et w ont pour coordonnées (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3), le déterminant de ces trois vecteurs est défini par

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2\end{aligned}$$

Ce déterminant peut être calculé directement, par une méthode appelée « règle de Sarrus »

2.2 Définition par récurrence

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. Pour $(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A. C'est donc une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$. On peut alors définir le déterminant par récurrence.

Définition IV.2 Le déterminant d'une matrice est défini par récurrence par les conditions :

- Si $A = (a) \in \mathcal{M}_1(K)$, $\det A = a$
- Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ alors

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$$

On dit que le déterminant est « développé par rapport à la première colonne ».

Ⓡ Une remarque : on a constaté que les déterminants 2×2 et 3×3 contenaient respectivement 2 et 6 termes : une récurrence facile montre que le déterminant $n \times n$ est la somme de $n!$ produits formés d'éléments de la matrice. Chacun de ces produits est formé d'un élément de chacune des colonnes, et il est affecté d'un signe $+$ ou d'un signe $-$.

2.3 Propriétés des déterminants

Ces propriétés ne seront pas justifiées complètement cette année. Commençons par des propriétés de calcul.

Proposition IV.3

1. Le déterminant est multilinéaire par rapport à chacune des colonnes.
2. Si on échange deux colonnes (ou deux lignes), le déterminant change de signe.
3. Si un déterminant contient deux colonnes identiques, il est nul.
4. Si on multiplie une ligne (ou une colonne) par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.
5. Le déterminant est inchangé si on remplace une ligne par elle-même additionné d'une combinaison d'autres lignes. Idem avec les colonnes.
6. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des éléments diagonaux.

Preuve Commençons par détailler la signification de la première propriété : si nous considérons le déterminant comme fonction des n colonnes, qui sont des vecteurs de K^n, alors le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ces colonnes, les autres étant inchangées. Ainsi, par exemple :

$$\det(C_1 + \lambda C'_1, C_2, \dots, C_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \lambda \det(C'_1, C_2, \dots, C_n)$$

En ce qui concerne cette première colonne, la propriété est immédiate, il suffit d'écrire :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} + \lambda a'_{i1})(-1)^{i+1} \det A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + \lambda \sum_{i=1}^{n} a'_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$$

•

Pour le reste, il convient de raisonner par récurrence.

Il en résulte, par exemple, une méthode de calcul du déterminant basé sur la méthode du pivot : on s'efforce de se ramener par opérations élémentaires à une matrice triangulaire supérieure.

D'autres propriétés, plus délicates à démontrer :

Proposition IV.4

1. $\det AB = \det A \times \det B$ lorsque A et B sont des matrices carrées de même taille.
2. A inversible $\iff$ $\det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
4. $\det{}^t A = \det A$.

La dernière propriété est très utile : elle permet de dire que toutes propriété énoncée en terme des colonnes d'un déterminant se transpose en une propriété en terme de lignes de ce déterminant.

Enfin, une formule très proche de la définition.

Proposition IV.5 Pour j fixé entre 1 et n.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

On dit que l'on a développé suivant la colonne d'indice j. De même,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

On dit que l'on a développé le déterminant suivant la ligne d'indice i.

3 Applications des déterminants

3.1 Indépendance des vecteurs

La première application résulte du théorème sur le déterminant d'une matrice inversible.

Théorème IV.1 Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est un système de n vecteurs dans un espace de dimension n. On note A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des (u_i) dans une base $\mathscr{B}$. Alors le système est libre si et seulement si le déterminant de A est non nul.

® Dans ce cas, les (u_i) forment une base, et A est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers cette base.
Si on est en dimension 2 ou 3 et si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le déterminant de A représente l'aire du parallélogramme (resp. le volume du parallélotope) construit sur ces vecteurs.

3.2 Comatrice

Définition IV.3 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. On appelle comatrice de A la matrice définie par :

$$\mathrm{com} A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij} ; la comatrice est donc la matrice des cofacteurs.

Théorème IV.2 Si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}\mathrm{com} A$$

Cette formule ne sert pratiquement jamais... Elle demande en effet trop de calculs de déterminants. On la démontre en observant le produit $A^t\mathrm{com}(A)$. Sur la diagonale, on retrouve $\det A$ obtenu en développant suivant une ligne. Pour les autres cases, on observe qu'il s'agit du développement d'un déterminant dont deux lignes sont identiques.

3.3 Formules de Cramer

Si (S) est un système linéaire de n équations à n inconnues, on rappelle que c'est un système de Cramer si sa matrice est inversible.

Théorème IV.3 Soit (S) un système $AX = B$ où A est inversible. On note A_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ème colonne de A par la colonne B. Alors, les éléments x_j de la matrice X sont donnés par :

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

Ces formules ne servent pratiquement jamais...

Preuve La démonstration utilise la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes ; si on note C_i les colonnes de A, (x_i) la solution du système, alors

$$\sum_i x_i C_i = B$$

Calculons alors :

$$\det A_j = \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \sum_i x_i \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = x_j \det A$$

•