Université de Cergy-Pontoise

Exercices de Mathématiques

L1 - MPI - M 2

Version 2012 - 2013

Table des matières

1 Structures algébriques

1. a) Montrer que la loi de composition $\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \overset{\circ}{\to} & \mathbb{Z} \\ (x,y) & \mapsto & x\circ y = x+y-xy \end{array}$ est commutative.
   Montrer que cette loi $\circ$ possède un élément neutre.
   Déterminer aussi les éléments inversibles.

   b) Mêmes questions si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$.
2. Dans les ensembles de nombres usuels, on connaît les lois : addition, soustraction, multiplication, division, exponentiation : reconnaître les lois non commutatives, non associatives.
3. Soit $A = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. On définit sur A les 2 lois $+$ et $\times$ selon les tableaux suivants

+			
$\nearrow_{+}$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\times$			
$\nearrow_{\times}$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

   a) Montrer que ces deux lois sont commutatives. Comment cette propriété se lit-elle sur ces 2 tables ?

   b) Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps dont on précisera les éléments neutres (celui de $+$ et celui de $\times$). On précisera au passage (lorsqu'ils existent) les opposés (i.e. les inverses pour la loi $+$) et inverses (i.e. les inverses pour la loi $\times$) des éléments a, b, c de A.
4. Montrer que $K = \{a + b\sqrt{2} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps : on montrera en particulier :

   a) la somme de deux éléments de K est dans K.

   b) le produit de deux éléments de K est dans K.

   c) tout élément non nul de K admet un inverse (symétrique pour le produit) qui est dans K.
5. Soit A un anneau unitaire. On suppose que $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

   a) Montrer que $\forall x \in A$, $x + x = 0$.

   b) Montrer que A est commutatif.

   c) Montrer que le seul élément inversible de A est 1.

2 Polynômes

1. Faire la division euclidienne de $P = X^3 + 3X^2 + 2X - 1$ par $Q = X^2 - X - 1$ puis celle de Q par P.
2. Effectuer les divisions euclidiennes de $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3, $3X^5+2X^4-X^2+1$ par $X^3 + X + 2$, $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.
3. Faire la division de $X^n+X^{n-1}+1$ par X^2+X+1 pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$. On pourra également étudier le cas général. n est un entier quelconque).
4. Trouver le paramètre réel m tel que le polynôme $P = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ donne le reste $R = 5$ lors de la division par $Q = X - 1$.
5. Exprimer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par le polynôme $(X - a)^2$ en utilisant la formule de Taylor.
6. Montrer que le reste R de la division d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ (où $a \neq b$) est
$$R = \frac{(X - a)P(b) - (X - b)P(a)}{b - a}$$
   On commencera par s'intéresser au degré de ce reste.

7. Si n est pair, montrer que $Q = X + 1$ divise $P_n = (X - 1)^n - (X + 3)^n$, mais que P_n n'est pas divisible par $T = (X + 1)^2$.
8. Trouver tous les polynômes qui satisfont $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$ (on pourra utiliser les racines éventuelles de P).
9. Pour quelles valeurs de n le polynôme $(X + 1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?
10. Montrer que $(X - 1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$. Trouver le quotient.
11. À quelle condition les polynômes suivants ont-ils une racine multiple ?

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \quad Q(X) = X^3 + pX + q$$

Dans le second cas, retrouver le résultat en étudiant la fonction.

12. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ des polynômes suivants :

$$P_n(X) = X^n + 1, \qquad n = 3, 4, 6, \qquad Q(X) = X^8 + X^4 + 1$$

13. Montrer que $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ a n racines distinctes en $\mathbb{C}$.
14. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ a deux racines doubles, et les trouver.
15. Décomposer en produit de polynômes irreductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1$.
16. Calculer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le p.g.c.d. des polynômes

$$P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 \quad \text{et} \quad Q = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X^2 - 2X + 1.$$

17. **Lemme de Gauss** Soient $P = X^3 + 1$ et $Q = X^2 + 1$. Montrer qu'ils sont premiers entre eux et trouver deux polynômes U et V tels que :

$$PU + QV = 1$$

Même question avec $P = X^4 + 1$ et $Q = X^2 + 1$.

18. On se donne trois polynômes A, B et C tel que :

$$A \text{ divise } B \qquad \text{et} \qquad A \wedge B = 1$$

Montrer que A divise C. On pourra utiliser le théorème de Bezout.

19. Soit A et B deux polynômes premiers entre eux. On sait qu'il existe U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = 1$. Trouver toutes les solutions de $AU + BV = 1$. Montrer qu'il en existe une telle que $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.
20. Chercher un polynôme P de degré 7 au plus tel que le polynôme $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et le polynôme $P - 1$ soit divisible par $(X + 1)^4$. On porra utiliser le polynôme dérivé.
21. Trouver ensuite les polynômes U et V (de degré 3 au plus) tels que :

$$(X + 1)^4U + (X - 1)^4V = 1$$

3 Sujets complémentaires

1. Chercher le pgcd de $X^{24}-1$ et de $X^{18}-1$. On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide.
2. **Fonctions symétriques, Sommes de Newton**
   a) Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X^1 + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il a trois racines α, β γ. On note σ_1, σ_2 et σ_3 les expressions
   $$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha+\beta+\gamma \\ \sigma_2 &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ \sigma_3 &= \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$
   Montrer qu'on peut exprimer ces trois nombres à l'aide des coefficients du polynôme : on pensera à une factorisation.
   b) Application : trouver les racines du polynôme $P = X^3 + 5X^2 - 8X - 48$ sachant qu'il admet deux racines distinctes dont la somme est égale à -1.
   c) Avec les mêmes notations, calculer en fonction de σ_1, σ_2, σ_3 les sommes de Newton
   $$\begin{aligned} S_2 &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ S_3 &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \\ S_4 &= \alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \end{aligned}$$
   d) Généraliser.
3. **Polynômes de Legendre** On définit des polynômes par :
   $$L_n(X) = \frac{d^n}{dx^n}(X^2-1)^n$$
   a) Calculer les premiers polynômes. Donner le degré de L_n et son terme dominant.
   b) Montrer que L_n a toutes ses racines simples et dans l'intervalle $]-1,1[$.
   c) Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$

   Ces polynômes s'appellent les polynômes de Legendre.
4. **Polynômes de Bernoulli**
   a) Si P et Q sont deux polynômes tels que $P(X) - P(X-1) = Q(X)$, quelle relation lie les degrés de P et de Q ?
   b) On note B_p un polynôme tel que :
   $$B_p(0) = 0 \quad \text{et} \quad B_p(X) - B_p(X-1) = X^p$$
   Calculer explicitement B_p pour $p = 0, 1, 2, 3$: on constatera qu'il y a une seule solution. On admettra que c'est vrai pour toute valeur de p.
   c) Montrer que
   - B_p est divisible par $X+1$ pour $p \geqslant 1$.
   - $B'_p(X) = pB_{p-1}(X) + B'_p(0)$
   - $B_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$

   d) Calculer f_4, f_5 et les factoriser au maximum.
5. **Polynômes d'Euler**
   a) Démontrer qu'il existe un seul polynôme P_n tel que :
   $$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$$
   Expliciter les premiers.

b) Former une relation entre P_n' et P_{n-1}.

c) Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, P_1, \ldots, P_n$ et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$.

d) Démontrer que :

$$P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$$

Interprétation ?

6. Soit l'équation $x^3 + x - 2 = 0$. On pose $x = u + v$. Trouver une condition que doivent satisfaire u et v de sorte que l'équation se réduise à : $u^3 + v^3 = 2$. Résoudre alors l'équation et en déduire :

$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$$

4 Espaces vectoriels

4.1 Généralités, sous-espaces vectoriels

1. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Vérifier que E est stable pour l'addition. Pourquoi n'est-pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Décider lesquels des ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl}
A & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z - y = 0\big\} \\
B & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4z^2 - y = 0\big\} \\
C & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 3z^2 - y^2 = 0\big\} \\
D & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 4z = 0\big\} \\
E & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \quad \text{ou} \quad x + y + z = 0\big\} \\
F & = & \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\big\}
\end{array}$$

3. Décider lesquels des ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl}
G & = & \{f \in C^{\infty}\mathbb{R} \mid f' + 2f = 0\} \\
H & = & \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(0) = 0\} \\
I & = & \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(0) = 3\} \\
J & = & \Big\{f \in C([a,b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(x)dx = 0\Big\} \\
K & = & \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{degr} P \geqslant 3\} \\
L & = & \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' \text{ divise } P\}
\end{array}$$

4. Dans l'espace vectoriel E des suites réelles, les ensembles suivant sont-ils des sous-espaces vectoriels :
   a) l'ensemble des suites stationnaires
   b) des suites convergentes.
   c) des suites croissantes.
   d) des suites géométriques.
   e) des suites ayant un nombre infini de termes non nuls.
5. Soit E l'espace vectoriels des suites réelles. Montrer que l'ensemble des suites géométriques de raison 2 forme un sous-espace vectoriel, mais que l'ensemble des suites géométriques n'est pas un sous-espace vectoriel.
6. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes. Montrer que $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes pairs (=tous les exposants sont pairs) est un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il en va de même pour l'ensemble $\mathscr{I}$ des polynômes impairs (si l'on convient que le polynôme nul en fait partie.
7. Soit E un espaces vectoriels et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
   a) $F \cap G$ est un s.e.v. de E.
   b) $F \cup G$ est s.e.v. de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $E \times E$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{C}$-ev par :
$$(a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$
l'addition étant la même.

4.2 Systèmes de vecteurs

1. Soit
$$u_1 = (2,3), \qquad u_2 = (-1,4), \qquad u_3 = (5,3)$$
trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'ils forment un système lié et préciser une relation de liaison.
2. Soient
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$
trois vecteurs de $\mathcal{M}3,1(\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^3$. Rechercher s'ils forment un système libre ou lié.
3. Soient
$$(-1,0,0,1), (2,1,1,0), (1,1,1,1), (1,2,3,4) \text{ et } (0,1,2,3)$$
cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Forment-ils un système libre ? Trouver un sous-ensemble libre, ayant le plus grand nombre possible d'éléments.
4. Une famille de trois vecteurs contient des vecteurs deux à deux libres. Est-elle libre ?
5. L'intersection de deux familles liées est-elle liée ? La réunion de deux familles libres est-elle libre ?
6. On suppose que x, y et z sont trois vecteurs indépendants. Étudier l'indépendance de $a = x+y$, $b = y+z$ et $c = z+x$. Généraliser.
7. Démontrer que toute suite de polynômes de degrés distincts est une famille libre. On dit que c'est une famille **échelonnée**.
8. Est-ce que $\{a,b,c\}$ est libre si et seulement si $\mathrm{vect}(a,b) \cap \mathrm{vect}(a,c) = \mathrm{vect}(a)$?
9. Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les trois fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \cos x$ et $f_3 : x \mapsto sin(x+1)$ forment un système lié. On précisera une relation de liaison.

4.3 Bases, dimension finie

1. Dans $\mathbb{R}^3$, F est défini par :
$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$
Après avoir vérifié que c'est un s.e.v. de E, en donner une base.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère
$$F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$
Vérifier que F est de dimension 2. En donner deux bases n'ayant aucun vecteur en commun.
3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes. Préciser sa dimension et en donner une base. Montrer que les polynômes
$$H_(X) = 1, H_1(X) = X, H_2(X) = X(X-1), H_3(X) = X(X-1)(X-2), \ldots, H_n(X) = X(X-1)\cdots(X-n+1)$$
forment également une base de E. Est-ce que les polynômes
$$P_k(X) = (X-k)^n$$
pour $k = 0..n$ en forment une base ?
4. Déterminer une base de l'espace vectoriel des matrices diagonales, des matrices symétriques, des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(K)$. On pourra utiliser les matrices E_{ij} de la base canonique, et on précisera les dimensions.

5. Soient E et F deux K-e.v. Montrer que le produit cartésien $E \times F$ est «naturellement» un espace vectoriel. Quelle est sa dimension, lorsque E et F sont de dimension finie ?

4.4 Sommes de sous-espaces, exercices supplémentaires

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) forme un système libre de E si et seulement si la somme $\mathrm{vect}(e_1) + \mathrm{vect}(e_2) + \mathrm{vect}(e_3)$ est directe.
2. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors
$$F \subset G \iff F + G = G$$
3. Montrer que le sous-ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paires et le sous-ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
4. **Polynômes de Lagrange**
Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts. Montrer qu'il existe trois polynômes P_1, P_2 et P_3 de degré inférieur ou égal à deux tels que :
$$P_i(a_j) = \delta_i^j$$
où δ_i^j est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. Montrer que les trois polynômes obtenus forment alors une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Si P est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, comment s'interprètent les coordonnées de P dans cette base ? Généraliser. Utiliser cet exercice pour écrire une condition sur les coordonnées de quatre points pour qu'il existe une parabole d'axe vertical ou une droite qui les contienne.
5. Montrer que si $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des s.e.v. d'un même e.v.,
$$\mathcal{E} \cap (\mathcal{F} + \mathcal{G} \cap \mathcal{E}) = (\mathcal{E} \cap \mathcal{F}) + (\mathcal{E} \cap \mathcal{G})$$
6. Soient $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$, dont les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$; sont-ils supplémentaires ?
7. On considère
$$\mathcal{E} = \left\{ f : [-a, a] \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \right\}$$
où a est un réel fixé et $\mathcal{F}$ les sous-ensemble des fonctions f telles que :
$$\exists A \, \forall x \in [-a, a] \quad |f(x)| \leq A\,|x|$$
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel. En donner un sous-espace supplémentaire.
8. On considère $E_{a,b} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad / \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$
Montrer que c'est un espace vectoriel de dimension 2. En donner une base dans les particuliers suivants : $a = 2,\ b = -1\,;\quad a = 1,\ b = 1\,;\quad a = 0,\ b = 1$.
9. Soit L un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un corps. Montrer que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Vérifier que c'est le cas par exemple lorsque
$$L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Peut-on remplacer $\sqrt{2}$? Et par $\sqrt{3}$ ou $\sqrt[3]{2}$?
10. $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si r est un réel, on pose : $f_r(x) = |x - r|$.
– Démontrer que la famille$\{f_r / \, r \in \mathbb{R}\}$ est une famille libre.
– Démontrer de même que la famille $\left\{ g_k(x) = (\sin x)^k \;/\; k \in \mathbb{N} \right\}$ est aussi une famille libre.
11. Soit E l'espace vectoriel des fonctions affines sur $[a, b]$. Montrer que $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto b - x$ en constituent une base.

5 Applications linéaires et matrices

5.1 Généralités sur les applications linéaires

1. Décider si les applications suivantes sont linéaires :
   a) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $u(a, b, c) = (a + b, b + c, c + a)$;
   b) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ t.q. $u(a, b, c) = (a - 2b + c, b - c, b + c, a)$;
   c) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $u(a, b, c) = (a, a + b, bc)$;
   d) $u : C^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.q. $u(f) = \int_a^b f(t)dt$.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ On définit une application $u : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Dire si elle est linéaire :
   a) $u(P)(X) = P'(X)$
   b) $u(P)(X) = P'(X) - P(2X)$
   c) $u(P) = P(0) + P(1)$
   d) $u(P)(X) = P(-X)$
   e) $u(P)(X) = P(X)P'(X)$
   f) $u(P)(X) = P(X^2)$
   g) si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, alors $u(P)(X) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

   Si on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, lesquelles des applications précédentes sont des endomorphismes ?
3. Soit $E = \mathcal{M}_n(K)$. À toute matrice $A = (a_{ij}$ de E, on associe $f(A) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in K^n$. Montrer que c'est une application linéaire. Cette application est-elle injective ? Surjective ? (on prendra $n \geqslant 2$).
4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application ϕ qui à $f : x \mapsto f(x)$ associe $x \mapsto f(-x)$. Montrer que c'est une application linéaire. Quelles sont les fonctions telles que $\Phi(f) = f$?
5. Soient p et q deux projecteurs tels que

   $$p \circ q = q \circ p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$$

   Montrer que $p = q$.

5.2 Matrice d'une application linéaire

1. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

   $$g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2)$$

   a) Déterminer la matrice de g par rapport à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et calculer les images des vecteurs $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 4)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Que remarque-t-on ?
   b) Chercher tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont l'image est nulle.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^{\nVDash}$ dans lui-même définie par :

   $$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_3, -x_1.x_2 + 4x_3)$$

   a) Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   b) Déterminer l'image de la droite $\mathrm{vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ par l'application linéaire f.
   c) Déterminer l'image réciproque de la droite $\mathrm{vect}(2e_1 - e_2)$.

d) Déterminer l'image du sous-epace de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$P = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension 2 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$; on appelle f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice de f dans les bases suivantes : $\mathcal{B}' = (e_1+e_2, e_1-e_2)$ et $\mathcal{B}'' = (2e_1+5e_2, -e_1-3e_2)$
Est-il possible de trouver une base dans laquelle la matrice de f soit inchangée ?

4. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$T(e_1) = (1,1,1), \;\; T(e_2) = (0,1,0), \;\; (e_3) = (0,1,0)$$

où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Calculer $T(u)$ où $u = (1,2,3,)$.
b) Trouver la matrice de T dans la base $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ où

$$e'_1 = (1,0,0), \;\; e'_2 = (1,1,0), \;\; e'_3 = (1,1,1).$$

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

5. Trouver la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui satisfait les égalités

$$T(v_i) = w_i, \;\; i = 1,2,3,$$

où $v_1 = (2,3,5)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (1,0,0)$ et $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = (1,1,-1)$, $w_3 = (2,1,2)$.

6. Soit $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $T\left(P(X)\right) = XP'(X)$. Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{B} = \{1, 1+X, (1+X)^2\}$.

7. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension 2, de base $\mathcal{B} = (i,j)$. Trouver les matrices des endomorphismes suivants (N.B. il peut y avoir une ou plusieurs ou aucune solution(s))

   a) f échange $i+j$ et $i-j$
   b) g transforme i en $2i+3j$ et $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{vect}\,\langle i-2j \rangle$
   c) h transforme j en $i-j$ et $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{vect}\langle 2i-j \rangle$
   d) $k \circ k = 2id$ et $i+j$ est invariant.
   e) p est la projection sur $\mathrm{vect}\,\langle ai+bj \rangle$ de direction $\mathrm{vect}\,\langle ci+dj \rangle$

8. On considère les applications linéaires suivantes définies dans $\mathbb{R}_n\,[X]$; écrire leur matrice dans la base canonique ; on choisira l'ev d'arrivée.

   a) La dérivation.
   b) La multiplication par X.
   c) La «translation» de a c'est-à-dire l'application $P(X) \mapsto P(X+a)$.
   d) La forme linéaire :

$$P \longmapsto \int_0^1 P(t)dt$$

   On pourra au préalable s'assurer qu'il s'agit bien d'applications linéaires.

9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit un endomorphisme f par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

a) Définir $f^2 = f \circ f$.
b) Déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
c) Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.

10. Dans l'espace E des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on définit l'application ϕ par :

$$\phi(f) = f + f'$$

Montrer que c'est un endomorphisme. Trouver son noyau et son image. Sont-ils supplémentaires ?

5.3 Compléments sur les applications linéaires

1. On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie et que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.
   a) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont monotones et stationnaires partir d'un certain rang.
   b) Examiner ce que sont ces suites lorsque $f = \frac{\partial}{\partial X}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathcal{E} = \mathbb{R}[X]$ (dans ce dernier cas, il n'y a plus bien sûr l'hypothèse de la dimension finie).
   c) Montrer que l'indice partir duquel ces suites sont stationnaires est le même pour chacune des deux. Soit n cet indice.
   d) Montrer que N_n et I_n sont supplémentaires, sont stables chacun par f et que la restriction de f à I_n est un isomorphisme tandis que la restriction de$f$ à K_n est nilpotente.
2. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sev de $\mathcal{E}$, que l'on suppose de dimension finie. On considère l'application définie par :
   $$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{F} \times \mathcal{G} & \to & \mathcal{E} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x + y. \end{array}$$
   a) Vérifier que f est linéaire ; en déterminer l'image et le noyau.
   b) En déduire $\dim(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$
3. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ de rang 1. Montrer qu'il existe un seul scalaire λ tel que $f \circ f = \lambda f$
4. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel, u un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On suppose qu'il existe un seul endomorphisme v de $\mathbb{E}$ tel que $u \circ v = id_{\mathbb{E}}$. Montrer que u est un automorphisme. Que dire en cas de dimension finie ? Et si v n'est pas unique ?
5. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension quelconque, $\mathbb{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
   Montrer que si $\mathbb{U}$ est de dimension finie, alors $f(\mathbb{U}) \supset \mathbb{U}$ implique $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. Donner un contre-exemple en dimension infinie.
6. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel, et f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que pour tout élément x de $\mathcal{E}$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.
7. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de $\mathcal{E}$.
   a) Montrer que si la famille $(f(e_1), \ldots, f(E_n))$ est libre, alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
   b) On suppose f injective. Montrer que si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
8. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Montrer que :
   $$\mathrm{Ker}\,(v \circ u) = u^{-1}\,(\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u)$$

9. Si u est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que :
$$u^2 - 2u + id = 0$$
Montrer que u est inversible et calculer u^{-1} en fonction de u.
10. Montrer que lorsque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q - Q' = P$
11. Soit $(E_i)_{i=1 à k}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$, de dimension finie. Montrer que la somme $\sum E_i$ est directe si, et seulement si :
$$\dim\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$$
12. Dans un espace vectoriel de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v tels que :
$$u \circ v - v \circ u = kv$$
où k est un réel fixé. Montrer que :
$$u \circ v^n - v^n \circ u = knv^n$$
13. Si E est un espace de dimension finie et f un endomorphisme de E, montrer l'équivalence des trois propositions :
$$\begin{array}{rrl} (i) & \mathrm{Ker}\, f = & \mathrm{Ker}\, f^2 \\ (ii) & \mathrm{Im}\, f = & \mathrm{Im}\, f^2 \\ (iii) & E = & \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \end{array}$$
14. **Dualité** :
Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel, on note $\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathbb{R})$, appelé «dual» de $\mathcal{E}$.
   a) Rappeler pourquoi $\mathcal{E}^*$ est un espace vectoriel. Quelle en est la dimension ?
   b) On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$ et une base $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{E}^*$ sont duales si, et seulement si :
   $$\forall e_i \in \mathcal{B}, \forall e_j^* \in \mathcal{B}^*, \quad e_j^*(e_i) = \delta_{ij} \qquad \text{(symbole de Kronecker)}$$
   Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, et si $\mathcal{B}$ est la base canonique, quelle est la base duale ?
   c) Même question pour $\mathbb{R}_n[X]$ et la base canonique.
   d) Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. On pose :
   $$\mathcal{H}^\perp = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathbb{R}) / \forall x \in \mathcal{H}\ f(x) = 0\}$$
   Montrer que
   $$\dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{H}^\perp = \dim \mathcal{E}$$

5.4 Compléments sur les matrices

1. Soient A et B les matrices définies par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
Soit F l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}$ telles que
$$AXB = 0$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}$ et en donner une base.

2. A est une matrice carrée de rang 1.

   a) Montrer qu'il existe deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = X^tY$$

   b) Si de plus $tr(A) = 1$, montrer que A est la matrice d'une projection.

3. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer A^2, A^3.

   b) Montrer que A^n est de la forme

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et former les relations de récurrence que satisfont les trois suites.

4. Calculer les puissances n des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

5. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer J^2. En déduire que J est inversible et calculer son inverse.
   b) Calculer J^n ($n \in \mathbb{N}$) en déterminant dans $\mathbb{C}[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
   c) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n en utilisant J.

6. Une matrice est triangulaire supérieure ssi :

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \quad \text{et } a_{ij} = 0 \text{ pour tout } i > j$$

   Montrer que le produit de deux telles matrices est encore une matrice triangulaire supérieure. Quand une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ?

7. On définit la transposée d'une matrice carrée par :

$$\text{si } A = (a_{ij}) \quad \text{alors} \quad {}^tA = (a_{ji})$$

   Une matrice T est triangulaire supérieure. Montrer que T est diagonale si, et seulement si :

$$T\,{}^tT = {}^tTT$$

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la trace de A par :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

a) Montrer que Tr est une forme linéaire définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer, par le calcul, que
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

c) Si A et A' sont deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, montrer que
$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$$

9. Soit $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $E_{ij} = (a_{xy})_{1\leq x\leq n, 1\leq y\leq n}$ avec $a_{ij} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.
Déterminer $E_{ij}E_{kl}$. Si A est une matrice quelconque, calculer :
$$E_{ij}A \quad AE_{ij} \quad \text{et} \quad E_{ij}AE_{kl}$$
En déduire toutes les matrices A qui vérifient :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA$$

10. On appelle matrice de permutation une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contienne que des 0 et des 1, avec un et un seul 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. Combien y a t-il de telles matrices ? Si A est une matrice quelconque, comment décrire PA et AP ? Montrer que l'ensemble des matrices de permutations est un groupe pour la multiplication des matrices (on pourra se limiter à $n = 3$).

11. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et soit A une matrice quelconque (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Déterminer JAJ.

12. (*) On cherche à résoudre, dans l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation :
$$M + tr(M)A = B$$
où M est la matrice inconnue. Résoudre cette équation en utilisant le fait que $M \in \mathrm{vect}(A, B)$.
Résoudre de même l'équation :
$$M + {}^tM = tr(M)A$$

5.5 Rang-inversibilité

13. Calculer le rang de la matrice M définie par :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

14. Calculer les inverses des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice définie par :
$$a_{ii} = a \ \text{ pour tout } i, \mathbb{Q}uad a_{ij} = b \ \text{ pour tout } i \neq j$$
Étudier l'inversibilité de A et calculer son inverse quand il existe.

16. A et C sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, B est une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Montrer que :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

(matrice-bloc) est inversible et donner son inverse.

17. On recherche les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   – M est inversible
   – M et M^{-1} sont à coefficients positifs.
   a) Examiner le cas où $n = 2$.
   b) Si σ est une bijection de $\{1, 2, ..n\}$ dans lui-même, et (c_i) une suite de n nombres strictement positifs, montrer que la matrice $M = (c_j \delta_{\sigma(i)j})$ convient. On pourra commencer par étudier un cas particulier.
   c) Soit M une matrice du type demandé. En examinant le produit MM^{-1}, montrer que M est du type indiqué ci-dessus.
18. **Théorème de Hadamard**
   Si
   $$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$
   alors la matrice A est inversible.
   On utilisera un raisonnement par l'absurde : sinon, le système $AX = 0$ admet une solution non triviale.
19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   $$AM = 0 \Rightarrow M = 0$$
   Montrer que A est inversible. On pourra utiliser u l'endomorphisme de matrice A et un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.
   Traiter de même le cas où $MA = 0 \Rightarrow M = 0$ pour tout M
20. Soit $\mathbb{E} = \{A = (a_{i,j})|\ a_{ij} = 0$ ou 1 et A inversible$\}$. On note $S(A)$ la somme de tous les éléments de A.
   a) Donner des exemples d'éléments de $\mathbb{E}$.
   b) Montrer que $A \in \mathbb{E} \Rightarrow n \leqslant S(A) \leqslant n^2 - n + 1$
   c) Montrer que si A, B et AB sont dans $\mathbb{E}$, alors $S(AB) \leqslant S(A)S(B)$.
   d) On suppose A, B, C, AB, ABC dans $\mathbb{E}$, et $S(ABC) = S(A)S(B)S(C)$. Montrer que $S(AB) = S(A)S(B)$

5.6 Autres questions

21. Résoudre l'équation :
   $$XY = YX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   où X et Y sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pourra introduire des endomorphismes associés.
22. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des matrices de la forme
   $$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que c'est un groupe pour le produit. Est-ce un s.e.v. ? En chercher le centre.

23. On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble H défini par :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrer que H est un corps non commutatif (corps des quaternions). Montrer que H est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et en donner une base.

6 Déterminants, systèmes

1. Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice A_m, donnée par
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$
est-elle inversible ? Déterminer son rang lorsqu'elle ne l'est pas. Inversez-là lorsqu'elle est inversible.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des nombres complexes tous non-nuls. Étudier l'inversibilité de
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
et calculer son inverse.

3. Rechercher le rang des matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^3 et B^3 et en déduire que A et B ne sont pas sembmlables.

4. Calculer les déterminants
$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (b) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ & 9 & 6 \end{vmatrix} \text{ dans } mathbbR.$$

5. Résoudre l'équations $D(x) = 0$ où
$$D(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère. Montrer que trois points sont alignés si et seulement si leurs coordonnées vérifient :
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Calculer le déterminant :
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$
en utilisant la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad \text{où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
Essayer de généraliser.

8. Soit le déterminant d'ordre n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Etablir une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1} et en déduire D_n.

9. Soient $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}[X]$, définis par

$$P_1(X) = \lambda + X + X^2, \quad P_2(X) = 1 + \lambda X + X^2, \quad P_3 = 1 + X + \lambda X^2.$$

a) Trouver λ tel que $\{P_1, P_2, P_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) pour un tel λ, donner les coordonnées dans cette base de $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.

10. Trouver le rang de

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

à l'aide des déterminants.

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$. Montrer que, s'il existe deux endomorphismes de E, injectifs, u et v, tels que

$$u \circ v + v \circ u = 0,$$

alors E est de dimension paire.

12. Les entiers 4573, 1989, 6052 7956 sont divisibles par 17 (vérifier). Montrer qu'il en va de même pour le nombre entier :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 9 & 8 & 9 \\ 6 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

13. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin 2a & \sin 3a & \sin 4a \\ \sin 3a & \sin 4a & \sin 5a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad D = \det[i+j]$$

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & a & a & \ldots & a \\ a & 1 & a & \ldots & a \\ a & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & a \\ a & a & \ldots & a & 1 \end{vmatrix}$$

14. La matrice $A_n(x)$ est définie par $A_n(x) = (a_{i,j})_{i,j=1 \text{à } n}$ où :

$$a_{i,i} = x \quad a_{i,j+1} = a_{i,j-1} = 1$$

les autres coefficients étant nuls. Calculer

$$\det\left(A_n(0)\right), \det\left(A_n(2\cos\theta)\right), \det\left(A_n(\frac{5}{2})\right), \det\left(A_n\left(x\right)\right).$$

15. Calculer :

$$\begin{vmatrix} I & B \\ 0 & C \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

où A, B et C sont des matrices carrées et I la matrice de l'identité (on pourra commencer par supposer A inversible).

16. Soit $M_n = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{ii} = r_i$ et $m_{ij} = a$ si $i < j$ et $m_{ij} = b$ si $i > j$.

    a) En appelant $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1, montrer que $\det(M_n + \lambda J_n) = \alpha_n + \lambda\beta_n$.

    b) Calculer α_n et β_n en commençant par le cas où a=b.

17. Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On procèdera par récurrence, en utilisant un polynôme.

7 Systèmes d'équations linéaires

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes :

$$(a) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 5x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 3y & & & = & 3 \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 4 \\ x + 2y + z & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 4 \end{array} \right.$$

3. Discuter l'existence et l'unicité des solutions dans $\mathbb{R}$ pour les systèmes suivants :

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + a^2z & = & 1 \\ x + ay + abz & = & a \\ bx + a^2y + a^2bz & = & a^2b \end{array} \right.$$

a et b sont deux paramètres réels.

$$(b) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + (2t-1)z & = & 1 \\ tx + y + z & = & 1 \\ x + ty + z & = & 3(t+1) \end{array} \right.$$

t est un paramètre réel.

$$(c) \quad \begin{cases} 2x+y-z &= a \\ x+my+z &= b \\ 3x+y-mz &= c \end{cases}$$

a, b, c, m sont quatre paramètres réels.

4. Discuter l'existence des solutions du système suivant et préciser la dimension de l'espace affine des solutions :

$$\begin{cases} 2x+y-z+t &= 3 \\ x+y+2z-2t &= 2 \\ 3x-5y+7z-4t &= 1 \end{cases}$$

5. Discuter l'existence de solutions du système suivant et déterminer l'espace affine des solutions

$$\begin{cases} 2x-5y+5z &= a \\ 3x-9y+8z &= b \\ 7x+5y+10z &= c \\ 4x-y+7z &= d \end{cases}$$

6. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases} \qquad \begin{cases} (m-1)x+my+z=m+1 \\ mx+2y+3z=3 \\ (m+1)x+my+(m-1)z=m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=2 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases} \qquad \text{où } a,b,c \text{ sont les racines de } t^3-\lambda t+1-\mu=0$$

$$\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=a \\ 7x-4y+z+3t=b \\ 5x+7y-4z-6t=c \end{cases} \qquad \text{(interprétation en termes d'applications linéaires)}$$

7. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_2 = ax_1+b \\ x_3 = ax_2+b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1}+b \\ x_1 = ax_n+b \end{cases}$$

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour assurer l'existence d'une matrice

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

qui vérifie $AX + XA = B$.

9. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \mu x+y+z+t &= 1 \\ x+\mu y+z+t &= a \\ x+y+\mu z+t &= a^2 \\ x+y+z+\mu t &= a^3 \end{cases}$$